

TD 1

Logique et raisonnement

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. ●●○ Traduire à l'aide de quantificateurs ce qu'on veut démontrer. Quelles variables déclareriez-vous pour faire la démonstration ? *On ne demande pas la démonstration.*

1. Démontrer que si n est un entier naturel, alors n est la somme de quatre carrés d'entiers.
2. Démontrer que tout réel x admet un entier relatif y qui lui est inférieur.
3. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout i dans $\{2, \dots, N\}$, montrer l'inégalité $\int_i^{i+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{i} \leq \int_{i-1}^i \frac{1}{t} dt$, puis démontrer que $\left| 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} - \ln(N) \right| \leq C$, où C est une constante indépendante de N .

Exercice 2. (*mauvaises*) *rédactions d'élèves.* Observer à chaque fois la question posée et la réponse donnée. Il y a quelque chose qui ne va pas : ou bien sur le fond (problème de logique), ou bien sur la forme (manière de rédiger le raisonnement), ou bien sur les deux. Proposer une correction.

1. **Question.** Soit A un ensemble de réels qui possède un élément x_0 et qui vérifie la propriété :

$$\forall x \in A, \forall y \in A, x - y \in A.$$

Montrer que : $\forall (x, y) \in A^2, x + y \in A$.

Réponse. Si $A = \mathbb{R}$, par exemple, alors pour tout x et pour tout y dans $\mathbb{R}$, $x - y$ est dans $\mathbb{R}$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $x + y \in \mathbb{R}$, d'où le résultat.

2. **Question.** Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Montrer que $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

Réponse.

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} \Leftrightarrow 4xy \leq (x+y)^2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 + y^2 + 2xy - 4xy \Leftrightarrow 0 \leq (x-y)^2.$$

3. **Question.** Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un unique couple $(k, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que m est impair et $n = 2^k m$.

Réponse. Si n est impair, c'est gagné, on prend $k = 0$. Sinon on divise n par 2 et si le résultat est impair, $n = 2 \times \frac{n}{2}$. Sinon on recommence, jusqu'à tomber forcément sur un nombre impair. Si k est le nombre d'étapes, on a $n = 2^k m$.

Exercice 3. *Quelques exemples fonctionnels.* ●●●

1. Déterminer une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, f(x) > \alpha$, mais qui ne satisfasse pas $\exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > \alpha$.
2. Déterminer une fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in]0, \varepsilon], \exists y \in]0, \varepsilon], f(x) = -1 \text{ et } f(y) = 1.$$

Exercice 4. ○○○ Soit $E = \{a, b, c\}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

$$1. a \in E \quad 2. a \in \mathcal{P}(E) \quad 3. \{a\} \in \mathcal{P}(E) \quad 4. (a, b) \subset E \quad 5. (a, b) \in E \quad 6. \emptyset \subset E.$$

Exercice 5. Différence symétrique. ●●○ Soient A et B deux parties de E , on appelle différence symétrique de A et B , l'ensemble $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Exercice 6. ●●○ Soit E un ensemble, A et B dans $\mathcal{P}(E)$.

1. On suppose qu'il existe un ensemble X tel que $(A \cup X) \subset (B \cup X)$ et $(A \cap X) \subset (B \cap X)$. Montrer que $A \subset B$.
2. On suppose qu'il existe X tel que $(A \cup X) = (B \cup X)$ et $(A \cap X) = (B \cap X)$. Que peut-on en déduire sur A et B ?
3. On suppose que $A \subset B$. Résoudre l'équation $A \cap X = B \cap X$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

Exercice 7. ●○ Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction constante et d'une fonction s'annulant en zéro.

Exercice 8. Somme de deux ensembles. Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$, on définit l'ensemble $A + B$ par $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$.

1. Montrer que pour toute partie A non vide de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} + A = \mathbb{R}$.
2. Montrer que pour toutes parties A , B et C de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$, on a $A + C \subset B + C$.
3. Somme de deux segments.
 - (a) Déterminer $[-1, 1] + [-1, 1]$.
 - (b) (cas général) Soient a, b, c et d quatre réels. On veut déterminer $[a, b] + [c, d]$.
 - Montrer que $[a, b] + [c, d] \subset [a + c, b + d]$.
 - Soit x dans $[a + c, b + d]$. En distinguant les cas $x - a \in [c, d]$, $x - b \in [c, d]$ et « $x - a$ et $x - b$ ne sont pas dans $[c, d]$ », démontrer que $x \in [a, b] + [c, d]$ et conclure.

Stratégie pour ce TD. Il faut que vous manipulez les trois points importants de ce chapitre : propositions logiques, ensembles, méthodes de démonstration.

- commencez par de petits exercices sur les propositions : 9, 10, 11.
- faire quelques exercices sur les ensembles : un sur la description des parties d'un ensemble (14), et un plus délicat mais intéressant (15)
- faire ensuite quelques raisonnements typiques : 21, 24, 28.

2 Propositions, logique, quantificateurs

Exercice 9. ●○○ Pour chaque couple de propositions, expliciter en français la différence entre les deux.

1. (dans cette question, on précisera quel énoncé est vrai et lequel est faux)
 - (a) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, n \leq N$.
 - (b) $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \leq N$.
2. (dans cette question, on dira quelles sont les f qui vérifient le premier énoncé, et quelles sont celles qui vérifient le second) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction.
 - (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) = y$.
 - (b) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = y$.

Exercice 10. ●●○ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Exprimer avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
2. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive.
3. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
4. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'annule.
5. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite nulle.

Exercice 11. ●●○ Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I . Exprimer les négations des assertions suivantes :

1. $\forall x \in I, f(x) \neq 0$.
2. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$
3. $\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
4. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$

Exercice 12. ●●○ Nier les énoncés suivants.

1. $\forall x \in A, \exists y \in B, (x \in C \text{ et } (x, y) \in D) \text{ ou } x \notin C$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, ((x, y) \in A \Rightarrow x \in B)$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, (\exists y \in \mathbb{R}, (x, y) \in A) \Rightarrow x \in B$.

Expliquer la différence entre les deux dernières phrases.

Exercice 13. *Quelques exemples fonctionnels.* ●●○ Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Traduire « f n'est pas identiquement nulle ».
 2. On dit que f vérifie
 - la propriété $\mathcal{C}$ si $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
 - la propriété $\mathcal{UC}$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
- (a) Démontrer que $\mathcal{UC} \Rightarrow \mathcal{C}$.
- (b) Démontrer que $x \mapsto 2x$ vérifie $\mathcal{UC}$.
- (c) Démontrer que $x \mapsto x^2$ vérifie $\mathcal{C}$ mais pas $\mathcal{UC}$.

3 Ensembles

Exercice 14. ●○○ Décrire $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$ où a désigne un élément.

Exercice 15. ●●○ Soient a, b deux réels tels que $b - a > 2$.

1. Déterminer

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \right].$$

2. Déterminer

$$B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right].$$

Exercice 16. Soient E un ensemble, A, B et C trois parties de E . Montrer les propositions suivantes :

1. $(A \cup B = E) \Leftrightarrow (\overline{B} \subset A)$ (où $\overline{B}$ désigne le complémentaire de B dans E)
2. $((A \cup B \subset A \cup C) \text{ et } (A \cap B \subset A \cap C)) \Rightarrow (B \subset C)$

Exercice 17. ●●○ Soit E un ensemble, A et B des sous-ensembles de E . Résoudre les équations suivantes d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$:

1. $A \cap X = B$.
2. $A \cup X = B$.

Exercice 18. ●●○ Démontrer que la partie A de $\mathbb{R}^2$ définie par $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ n'est pas un produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

Exercice 19. ●●○ Soit E un ensemble, éventuellement vide, dont les éléments sont des ensembles. On dit que E est **transitif** si

$$\forall x \in E, x \subset E.$$

1. Si $E = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, a-t-on $\{1\} \in E$? A-t-on $\{1\} \subset E$? E est-il alors transitif?
2. Les ensembles suivants sont-ils transitifs?

$$A = \emptyset, B = \{\emptyset\}, C = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

3. Soit X un ensemble quelconque. On définit la suite d'ensembles $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence ainsi : $X_0 = X$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = \mathcal{P}(X_n).$$

- (a) Si $X = \emptyset$, déterminer X_0, X_1, X_2, X_3 .
- (b) Si $X = \{1, 3\}$, déterminer X_2 .
- (c) Montrer que si X est transitif, alors pour tout n dans $\mathbb{N}$, X_n est transitif.

4. Montrer que si Y est un ensemble transitif, $Y \cup \{Y\}$ est transitif.

Si X est un ensemble, X est dit **héréditairement transitif** si tout élément de $X \cup \{X\}$ est transitif.

5. Montrer que tout élément d'un ensemble héréditairement transitif est héréditairement transitif.
6. Si on définit $A_0 = \emptyset$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\}$, démontrer que l'ensemble

$$N = \{A_k, k \in \mathbb{N}\}$$

est héréditairement transitif.

Point culture : on vient de construire les entiers naturels à la manière de von Neumann. On a même construit ce que l'on appelle le premier **ordinal**. Mais ceci doit attendre le chapitre 5 pour être prolongé!

4 Quelques raisonnements typiques

Exercice 20. ●○○

1. Soit p un nombre premier. Montrer que $\sqrt{p}$ n'est pas rationnel.
2. ●●○ (ne pas faire si vous n'avez pas fait spé maths) Un entier naturel n est un carré parfait si : $\exists m \in \mathbb{N}, n = m^2$.
Soit n dans $\mathbb{N}$. Montrer que si n n'est pas un carré parfait, alors $\sqrt{n}$ est irrationnel.

Exercice 21. ●○○ Soient a et b deux réels tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, x < a \Rightarrow x \leq b$.
Démontrer que $a \leq b$.

Exercice 22. *Densité des irrationnels dans les réels.* ●●○ On rappelle que les rationnels sont les éléments de $\mathbb{Q}$ et les irrationnels sont les éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1. Montrer que la somme de deux rationnels est rationnelle.
2. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{Q}$, pour tout y dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
3. Montrer que pour tout y dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\frac{y}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Si $A \subset \mathbb{R}$, on dit que A est **dense** dans $\mathbb{R}$ si elle vérifie la propriété

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in A, |x - y| \leq \varepsilon.$$

4. (Bonus) Montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
On déclarera proprement les variables, et on fera une disjonction de cas selon que le réel déclaré x appartient à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ou à $\mathbb{Q}$.

Exercice 23. ●○○ On montre par récurrence que quelle que soit la trousse, tous les stylos de cette trousse sont de même couleur.

Initialisation. Soit une trousse à un seul stylo. La proposition est évidente.

Hérédité. Supposons que toute trousse de n stylos ait tous ses stylos de même couleur. Soit une trousse de $n + 1$ stylos. Retirons un stylo à cette trousse. Les n restants sont de même couleur. Remettons ce stylo et prenons-en un autre. Les n restants sont aussi de même couleur, donc tous les stylos sont de même couleur.

Héréditaire et vraie au rang 1, la proposition est donc vraie pour tout entier n : toute trousse a donc ses stylos de même couleur !

Où est l'erreur ?

Exercice 24. ●○○ Déterminer une expression explicite du terme général des suites suivantes :

1. la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2(n+1)u_n \end{cases}$$

2. la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) v_n \end{cases}$$

Exercice 25. ●○○ On considère la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $t_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = t_n - t_n^2$.
Montrer que $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0, 1]$, i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq t_n \leq 1$.

Exercice 26. *Autour des nombres de Fibonacci.* ●●○ On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Calculer les 6 premiers termes de la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Montrer que pour tout entier naturel n , $\sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - 1$.
3. Montrer que pour tous p dans $\mathbb{N}^*$ et q dans $\mathbb{N}$, $F_p F_{q+1} + F_{p-1} F_q = F_{p+q}$.
On pourra procéder par récurrence sur p ou sur q .
4. Si a et b sont deux entiers naturels, on dit que a divise b s'il existe k dans $\mathbb{N}$ tel que $b = ka$.
Montrer que pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, pour tout k dans $\mathbb{N}$, F_p divise F_{kp} .
5. (Formule de Binet)
 - (a) Résoudre l'équation du second degré $x^2 - x - 1 = 0$. On note φ la solution strictement supérieure à 1 : montrer que l'autre solution de l'équation, que l'on notera φ' , vérifie $\varphi' = -\frac{1}{\varphi}$.
 - (b) Montrer que pour tout entier naturel n , $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n)$.

Exercice 27. ●●○

1. Déterminer le signe de la fonction $f : x \mapsto x^2 - x - 2$.
2. Déterminer l'ensemble des réels x tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, x^{n+2} \leq x^{n+1} + 2x^n$.
3. Déterminer l'ensemble des réels x tels que : $\exists n \in \mathbb{N}, x^{n+2} \leq x^{n+1} + 2x^n$.

Exercice 28. ●●○ Déterminer par analyse-synthèse toutes les fonctions f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, f(m+n) = f(m)f(n).$$

Exercice 29. ●●○ On veut déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n+1) \geq f(f(n)) + 1.$$

Analyse

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m \geq n \Rightarrow f(m) \geq n$. *On pourra faire une récurrence sur l'une des deux variables.*
2. En déduire que f est strictement croissante.
3. Montrer que pour tout entier naturel n , $f(n) < n+1$ et conclure l'analyse.

Synthèse

4. Effectuer la synthèse du problème.

Exercice 30. Déterminer par analyse-synthèse l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Exercice 31. ●●● Soit x un nombre réel tel que $x + \frac{1}{x}$ est un entier relatif. Montrer que pour tout entier n ,

$$x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 32. ●●● Démontrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. le principe de récurrence
2. toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément

Indications

- 1 **1.** Penser qu'il y a un $\forall$ au début.
- 2.** Le $\forall$ est évident ici, c'est le $\exists$ qui est caché.
- 3.** Piège, il y a deux propositions à formuler, la deuxième commence par « $\exists C$ »
- 2 **1.** Penser que la première proposition n'est pas très contraignante...
- 2.** Penser à une fonction qui oscille **beaucoup**.
- 4 Penser à trois éléments importants : l'**appartenance** d'un **élément** à un **ensemble**, l'**inclusion** d'une **partie** dans un **ensemble**, et les **produits cartésiens**.
- 5 **Commencer par faire un dessin**, puis raisonner par double inclusion.
- 6 **1.** Prendre un élément de A et dire qu'il appartient à $A \cup X$. Faire ensuite une disjonction de cas.
- 2.**
- 3.** Faire des dessins pour avoir l'idée, et raisonner par analyse-synthèse.
- 7 Faire une analyse-synthèse.
- 9 Penser qu'un « $\exists, \dots \forall$ » est beaucoup plus restrictif qu'un « $\forall, \dots, \exists$ ».
- 10 Attention ! « décroissante », « positive », etc. **incluent** le cas d'égalité en français.
- 11 Attention à
 - la négation d'un $\forall$ en $\exists$ et réciproquement,
 - la négation d'une application.
- 12 Pour comparer les énoncés, les exprimer sans implication. Et montrer que $\mathcal{Q}$ implique $\mathcal{P}$, mais pas l'inverse (en général).
- 13 **1.** Penser que « être identiquement nulle » signifie « être nulle pour tous les réels » .
- 2.** (a) La première question a été faite en cours.
- (b) Exprimer η **très simplement** en fonction de ε .
- (c) Nier proprement la propriété $\mathcal{UC}$.
- 14 Commencer par décrire en extension $\mathcal{P}(\{a\})$.
- 15 **ATTENTION !** La notion de « limite d'ensembles » n'existe pas.
 - 1.** Démontrer par double inclusion qu'il s'agit de $]a, b[$.
 - 2.** Démontrer par double inclusion qu'il s'agit de $]a, b[$.
- 17 **1.** Faire des dessins et démontrer que si on n'a pas $B \subset A$, il n'y a pas de solution.
- 2.** Faire des dessins et trouver une condition nécessaire pour qu'il existe une solution.
- 18 Raisonner par l'absurde en supposant que $A = B \times C$ avec $B \subset \mathbb{R}$ ou $C \subset \mathbb{R}$.
- 19 **1.** C'est de la vérification de vocabulaire : ne pas confondre $\in$ et $\subset$.
- 2.** Pensez au fait que toute proposition universelle est vraie sur $\emptyset$. Penser aussi au fait que $\emptyset$ est inclus dans n'importe quel ensemble.
- 3.** (a)
- (b)
- (c) Faire une récurrence. Pour l'hérédité, prendre x dans X_{n+1} , et considérer les éléments de x : quelle propriété vérifient-ils ?

4. Disjoindre les cas, selon que $x \in Y$ ou $x \in \{Y\}$.
5. Disjoindre les cas.
6. Montrer par récurrence que chacun des A_k est transitif.
- 20
 1. Faire le même raisonnement que $\sqrt{2}$ en cours.
 2. Utiliser la décomposition en facteurs premiers, et des théorèmes d'arithmétique.
- 21 Faire un raisonnement par l'absurde ou par contraposée.
- 23 Regarder l'hérédité pour le passage de 1 à 2 stylos.
- 24 **Toujours** commencer par calculer les 2 ou 3 premiers termes de la suite, puis intuitiver l'expression du terme général, puis faire une démonstration par récurrence.
- 27
 1. C'est une question de première S, il suffit d'étudier le trinôme du second degré.
 2. Faire une analyse-synthèse, prendre $n = 0$ puis $n = 1$.
 3. S'intéresser à la négation de la proposition.
- 28 Faire une analyse-synthèse très proche de la question de cours.
- 29
 1. Faire une récurrence sur n .
 2. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $f(n+1) > f(n)$.
 3. Remarquer que si f est une fonction croissante, alors pour tous x et y , $f(x) \geq f(y) \Rightarrow x > y$.
 - 4.
- 31 Faire une récurrence **double** ou **forte**, en pensant
 - ou bien à développer $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$,
 - ou bien à calculer $\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) \times \left(x + \frac{1}{x}\right)$.