TD 1
Logique et raisonnement

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. ●●○ Traduire à l'aide de quantificateurs ce qu'on veut démontrer. Quelles variables déclareriez-vous pour faire la démonstration ? *On ne demande pas la démonstration.*

1. Démontrer que si n est un entier naturel, alors n est la somme de quatre carrés d'entiers.

Correction

Ici, le « si n est un entier naturel » signifie un $\forall$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{N}^2,\ n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Savoir si on déclare n est délicat ici. Si dans l'énoncé, il y avait « soit n un entier pair. Montrer que n est la somme de quatre carrés » , là il n'y aurait pas besoin de déclarer n. Ici, je conseillerais quand même de le déclarer.

2. Démontrer que tout réel x admet un entier relatif y qui lui est inférieur.

Correction

Ici, le « tout » est déjà présent, et le « admet » doit vous faire penser à de l'existence : la partie soulignée s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{Z},\ y \leqslant x.$$

Ici, il faut très clairement déclarer le x, mais pour le y, il ne faudra pas le déclarer mais le **poser**.

3. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout i dans $\{2, \dots, N\}$, montrer l'inégalité $\displaystyle\int_i^{i+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \frac{1}{i} \leqslant \int_{i-1}^{i} \frac{1}{t}\,dt$, puis démontrer que $\left|1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} - \ln(N)\right| \leqslant C$, où C est une constante indépendante de N.

Correction

Là, c'est difficile ! Mais c'est un vrai extrait de concours. Il faut comprendre que les propositions qu'on veut faire démontrer sont

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall i \in \{2, \dots, N\},\ \int_i^{i+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \frac{1}{i} \leqslant \int_{i-1}^{i} \frac{1}{t}\,dt,$$

puis

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall N \in \mathbb{N},\ \left|1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} - \ln(N)\right| \leqslant C.$$

Il ne faudrait pas déclarer le N, il est donné par l'énoncé. En revanche, il faut déclarer i, et il faudra poser un C (et vérifier qu'il ne dépend pas de N).

Exercice 2. *(mauvaises) rédactions d'élèves*. Observer à chaque fois la question posée et la réponse donnée. Il y a quelque chose qui ne va pas : ou bien sur le fond (problème de logique), ou bien sur la forme (manière de rédiger le raisonnement), ou bien sur les deux. Proposer une correction.

1. **Question.** Soit A un ensemble de réels qui possède un élément x_0 et qui vérifie la propriété :

$$\forall x \in A,\ \forall y \in A,\ x - y \in A.$$

Montrer que : $\forall (x, y) \in A^2,\ x + y \in A$.
Réponse. Si $A = \mathbb{R}$, par exemple, alors pour tout x et pour tout y dans $\mathbb{R}$, $x - y$ est dans $\mathbb{R}$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $x + y \in \mathbb{R}$, d'où le résultat.

2. **Question.** Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Montrer que $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$.
Réponse.

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow xy \leqslant \frac{(x+y)^2}{4} \Leftrightarrow 4xy \leqslant (x+y)^2 \Leftrightarrow 0 \leqslant x^2+y^2+2xy-4xy \Leftrightarrow 0 \leqslant (x-y)^2.$$

3. **Question.** Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un unique couple $(k, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que m est impair et $n = 2^k m$.
Réponse. Si n est impair, c'est gagné, on prend $k = 0$. Sinon on divise n par 2 et si le résultat est impair, $n = 2 \times \dfrac{n}{2}$. Sinon on recommence, jusqu'à tomber forcément sur un nombre impair. Si k est le nombre d'étapes, on a $n = 2^k m$.

Exercice 3. *Quelques exemples fonctionnels*. ●●◐

1. Déterminer une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0,\ f(x) > \alpha$, mais qui ne satisfasse pas $\exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > \alpha$.

Correction

Il suffit de prendre une fonction qui tend vers 0 sans jamais l'atteindre ! Prenons par exemple $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{sinon.} \end{cases}$.

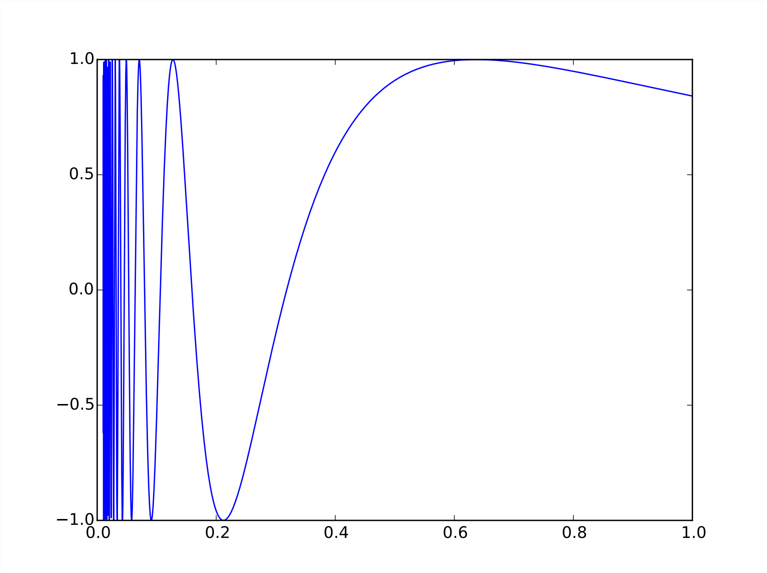
Soit x dans $\mathbb{R}$. On sait que $f(x) > 0$. Posons $\alpha = \dfrac{f(x)}{2}$. Alors $f(x) > \alpha$. Donc la première proposition est vérifiée.
Montrons ensuite la négation de la seconde, i.e. montrons que $\forall \alpha > 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant \alpha$.
Soit $\alpha > 0$. **Posons** $x = \dfrac{2}{\sqrt{\alpha}}$. Alors $f(x) = \dfrac{\alpha}{4} \leqslant \alpha$. D'où le résultat.
La fonction décrite au début fonctionne bien.

2. Déterminer une fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in]0, \varepsilon], \exists y \in]0, \varepsilon], f(x) = -1 \text{ et } f(y) = 1.$$

Correction

On va proposer la fonction suivante, très célèbre, dont je vous demande de connaître le graphe dès maintenant ! Il s'agit de la fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$, qui a la propriété d'osciller entre -1 et 1, de plus en plus vite, près de 0.



On va démontrer qu'une telle fonction convient. **Soit** $\varepsilon > 0$. Cherchons x dans $]0, \varepsilon]$ et y dans $]0, \varepsilon]$ tels que $f(x) = -1$ et $f(y) = 1$.

Au brouillon, on veut $\sin \frac{1}{x} = 1$, ce qui correspond à $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, i.e. à $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} = \frac{2}{\pi + 4k\pi}$. Quand k est assez grand, la quantité précédente est assez petite !

Soit k dans $\mathbb{N}$ tel que $\frac{2}{\pi + 4k\pi} \leqslant \varepsilon$. **Posons** $x = \frac{2}{\pi + 4k\pi}$. Alors $0 < x \leqslant \varepsilon$ et $\sin \frac{1}{x} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$.

De même, si l'on pose $y = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}$, alors $y \leqslant x \leqslant \varepsilon$, donc $y \in]0, \varepsilon]$ et $\sin \frac{1}{y} = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = -1$, d'où le résultat désiré !

Exercice 4. ○○○ Soit $E = \{a, b, c\}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

1. $a \in E$ **2.** $a \in \mathcal{P}(E)$ **3.** $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$ **4.** $(a, b) \subset E$ **5.** $(a, b) \in E$ **6.** $\emptyset \subset E$.

Correction

Oui, Non, Oui, Non, Non, Oui

Exercice 5. *Différence symétrique*. ●●○ Soient A et B deux parties de E, on appelle différence symétrique de A et B, l'ensemble $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

Correction

On propose deux corrections (et même trois).
♡**La solution par double inclusion** ♡**.**

Montrons par double inclusion que $(A\backslash B)\cup(B\backslash A)=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$.

1. **Montrons que** $(A\backslash B)\cup(B\backslash A)\subset(A\cup B)\backslash(A\cap B)$.
   Soit x dans $(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$.
   Montrons que x appartient à $(A\cup B)\backslash(A\cap B)$.
   On sait que x appartient à $(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$ donc x appartient à $(A\backslash B)$ ou à $(B\backslash A)$.
   (a) **Si** $x\in A\backslash B$, **alors** $x\in A$ donc $x\in A\cup B$.
   De plus $x\notin B$ donc $x\notin A\cap B$.
   Donc $x\in(A\cup B)\backslash(A\cap B)$.
   (b) **Si** $x\in B\backslash A$, **alors** $x\in B$ donc $x\in A\cup B$.
   De plus $x\notin A$ donc $x\notin A\cap B$.
   Donc $x\in(A\cup B)\backslash(A\cap B)$.

   Donc $(A\backslash B)\cup(B\backslash A)\subset(A\cup B)\backslash(A\cap B)$
2. **Montrons que** $(A\cup B)\backslash(A\cap B)\subset(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$.
   Soit x dans $(A\cup B)\backslash(A\cap B)$. **Alors** $x\in A\cup B$ et $x\notin A\cap B$.
   (a) **Si** $x\in A$, **alors**, **comme** $x\notin A\cap B$, $x\notin B$. **Donc** $x\in A\backslash B$. Donc $x\in(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$.
   (b) **Si** $x\in B$, **alors**, **comme** $x\notin A\cap B$, $x\notin A$. **Donc** $x\in B\backslash A$. Donc $x\in(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$.

   Donc $(A\cup B)\backslash(A\cap B)\subset(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$.

D'où l'égalité.

Méthode par double inclusion, version courte (ce vers quoi vous devrez tendre une fois que les méthodes auront été bien maîtrisées)

Montrons par double inclusion que $(A\backslash B)\cup(B\backslash A)=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$.

1. **Montrons** l'inclusion directe.
   Soit x dans $(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$.
   (a) **Si** $x\in A\backslash B$, **alors** $x\in A$ donc $x\in A\cup B$.
   De plus $x\notin B$ donc $x\notin A\cap B$.
   Donc $x\in(A\cup B)\backslash(A\cap B)$.
   (b) **De même**, **si** $x\in B\backslash A$, **alors** $x\in(A\cup B)\backslash(A\cap B)$.

   D'où l'inclusion directe.
2. **Montrons** l'inclusion réciproque.
   Soit x dans $(A\cup B)\backslash(A\cap B)$.
   (a) **Si** $x\in A$, **alors**, **comme** $x\notin A\cap B$, $x\notin B$. **Donc** $x\in A\backslash B$. Donc $x\in(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$.
   (b) **De même**, **si** $x\in B$, $x\in B\backslash A$, donc $x\in(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$.

   D'où l'inclusion réciproque, et par la même occasion l'égalité.

La méthode calculatoire.
Déjà, remarquons que $A\backslash B = \{x \in E | x \in A \text{ et } x \notin B\} = \{x \in E | x \in A\} \cap \{x \in E | x \notin B\} = A \cap \overline{B}$. De même, $B\backslash A = B \cap \overline{A}$. On en déduit que

$$A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}),$$

d'où, par distributivité,

$$\begin{aligned} A\Delta B &= \Big(A \cup (B \cap \overline{A})\Big) \cap \Big(\overline{B} \cup (B \cap \overline{A})\Big) \\ &= \Big((A \cup B) \cap (A \cup \overline{A})\Big) \cap \Big((\overline{B} \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})\Big) \end{aligned}$$

Or, $A \cup \overline{A} = E$ et $B \cup \overline{B} = E$. Donc

$$\begin{aligned} A\Delta B &= \Big((A \cup B) \cap E\Big) \cap \Big(E \cap (\overline{B} \cup \overline{A})\Big) \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}), \end{aligned}$$

car pour tout F de $\mathcal{P}(E)$, $E \cap F = F$. Enfin, d'après les lois de Morgan, $\overline{B} \cup \overline{A} = \overline{B \cap A}$, donc

$$A\Delta B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$$

Exercice 6. ●●◐ Soit E un ensemble, A et B dans $\mathcal{P}(E)$.

1. On suppose qu'il existe un ensemble X tel que $(A \cup X) \subset (B \cup X)$ et $(A \cap X) \subset (B \cap X)$. Montrer que $A \subset B$.

Correction

Soit a dans A. Procédons par disjonction des cas

- **si** $a \in X$, alors $a \in A \cap X$, donc, par hypothèse $a \in B \cap X$, donc $a \in B$.
- **si** $a \notin X$, on a tout de même $a \in A \cup X$, donc, par hypothèse, $a \in B \cup X$. Or, $a \notin X$, donc nécessairement $a \in B$.

Dans tous les cas $a \in B$. Donc $A \subset B$.

2. On suppose qu'il existe X tel que $(A \cup X) = (B \cup X)$ et $(A \cap X) = (B \cap X)$. Que peut-on en déduire sur A et B ?

Correction

On sait que $(A \cup X) = (B \cup X)$ et $(A \cap X) = (B \cap X)$, donc

- $(A \cup X) \subset (B \cup X)$ et $(A \cap X) \subset (B \cap X)$ donc $A \subset B$.
- $(B \cup X) \subset (A \cup X)$ et $(B \cap X) \subset (A \cap X)$ donc $B \subset A$.

Donc $A = B$.

3. On suppose que $A \subset B$. Résoudre l'équation $A \cap X = B \cap X$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

Correction

Procédons par analyse-synthèse.
Analyse. Soit X une solution de $A \cap X = B \cap X$. Soit x dans X. Alors,

- si $x \notin B$, alors $x \notin A$.
- si $x \in B$ et $x \notin A$, alors $x \in X \cap B$ mais $x \notin X \cap A$, impossible !
- si $x \in A$, alors $x \in B$.

Donc la seule condition nécessaire que nous trouvons est $X \cap (B - A) = \emptyset$, i.e. $X = Y \cup Z$ où $Y \subset E \backslash B$ et $Z \subset A$.
Synthèse. Soit X tel que $X \cap (B - A) = \emptyset$. Alors $X \cap A \subset X \cap B$ car $A \subset B$, et si $y \in X \cap B$, alors $y \in X$ donc $y \notin B - A$, donc $y \in A$ donc $y \in A \cap X$. Donc $A \cap X = B \cap X$.
Donc les solutions de l'éqations sont les X dans $\mathcal{P}(E)$ tels que $X \cap B - A = \emptyset$.

Exercice 7. ●◐○ Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction constante et d'une fonction s'annulant en zéro.

Correction

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. **Raisonnons par analyse-synthèse**.
Analyse. Supposons que $f = g + h$ avec g une fonction constante et h une fonction s'annulant en 0. Alors $f(0) = g(0)$ et, comme g est constante, g est égale à $f(0)$. Donc nécessairement $h = f - f(0)$. D'où l'unicité.
Synthèse. Posons g la fonction constante égale à $g(0)$ et h la fonction $x \mapsto f(x) - f(0)$. Alors

1. g est constante par construction.
2. $h(0) = f(0) - f(0) = 0$ donc g s'annule en 0.
3. $g + h = f(0) + f - f(0) = f$.

D'où l'existence !
D'où le résultat !

Exercice 8. *Somme de deux ensembles*. Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$, on définit l'ensemble $A + B$ par $A + B = \{x + y | x \in A,\ y \in B\}$.

1. Montrer que pour toute partie A non vide de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} + A = \mathbb{R}$.

Correction

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrons que $\mathbb{R} + A = \mathbb{R}$.

- Déjà, $\mathbb{R} + A \subset \mathbb{R}$: **soit** x dans $\mathbb{R} + A$. Alors **on dispose de** y dans $\mathbb{R}$ et z dans A tels que $x = y + z$. Donc $x \in \mathbb{R}$.
- Ensuite, montrons l'inclusion réciproque. **Soit** x un réel, a quelconque dans A. Alors $x = a + x - a$, avec $x - a \in \mathbb{R}$ et $a \in A$. Donc $x \in \mathbb{R} + A$.

D'où $\mathbb{R} + A = \mathbb{R}$.

2. Montrer que pour toutes parties A, B et C de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$, on a $A + C \subset B + C$.

Correction

Soient A, B et C trois parties de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$.
Soit $x \in A + C$. Alors **on dispose de** $a \in A$ et $c \in C$ tels que $x = a + c$.
Or, $a \in A \subset B$ donc $a \in B$, donc $a + c \in B + C$. Donc $x \in B + C$, d'où l'inclusion.

3. Somme de deux segments.

(a) Déterminer $[-1, 1] + [-1, 1]$.

Correction

Montrons que $[-1, 1] + [-1, 1] = [-2, 2]$.

- **Soit** $x \in [-1, 1] + [-1, 1]$. Alors **on dispose de** y dans $[-1, 1]$ et z dans $[-1, 1]$ tels que $x = y + z$. Or, $-1 \leqslant y \leqslant 1$ et $-1 \leqslant z \leqslant 1$, donc $-2 \leqslant y + z \leqslant 2$. Donc $[-1, 1] \subset [-2, 2]$.
- Réciproquement, **soit** x dans $[-2, 2]$. Écrivons $x = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}$. Alors $\dfrac{x}{2} \in [-1, 1]$ donc $x \in [-1, 1] + [-1, 1]$.

(b) (cas général) Soient a, b, c et d quatre réels. On veut déterminer $[a, b] + [c, d]$.

- Montrer que $[a, b] + [c, d] \subset [a + c, b + d]$.

Correction

Soit x dans $[a, b] + [c, d]$. Alors on dispose de y dans $[a, b]$ et de z dans $[c, d]$ tels que $x = y + z$. Or, $a \leqslant y$ et $c \leqslant z$ donc $a + c \leqslant y + z$. De même $y \leqslant b$ et $z \leqslant d$, donc $y + z \leqslant b + d$, donc $a + c \leqslant x \leqslant b + d$, donc $x \in [a + c, b + d]$.

- Soit x dans $[a + c, b + d]$. En distinguant les cas $x - a \in [c, d]$, $x - b \in [c, d]$ et « $x - a$ et $x - b$ ne sont pas dans $[c, d]$ » , démontrer que $x \in [a, b] + [c, d]$ et conclure.

Correction

Soit x dans $[a + c, b + d]$.

— si $x - a \in [c, d]$, on écrit $x = x - a + a$, avec $x - a \in [c, d]$ et $a \in [a, b]$ donc $x \in [a, b] + [c, d]$.

— si $x - b \in [c, d]$, on écrit $x = x - b + b$ et donc $x \in [a, b] + [c, d]$.

— sinon, comme $c + a \leqslant x$, $x - a \geqslant c$, donc si $x - a \notin [c, d]$, nécessairement $x - a > d$. De même $x - b < c$. Donc $x - b < c < d < x - a$, donc, en particulier, $x - c < b$, donc, comme $x - c \geqslant a$, $x - c \in [a, b]$, donc $x = x - c + c$ avec $x - c \in [a, b]$ et $c \in [c, d]$, donc $x \in [a, b] + [c, d]$.

Le résultat est finalement démontré !

Stratégie pour ce TD. Il faut que vous manipuliez les trois points importants de ce chapitre : propositions logiques, ensembles, méthodes de démonstration.

- commencez par de petits exercices sur les propositions : 9, 10, 11.
- faire quelques exercices sur les ensembles : un sur la description des parties d'un ensemble (14), et un plus délicat mais intéressant (15)
- faire ensuite quelques raisonnements typiques : 21, 24, 28.

2 Propositions, logique, quantificateurs

Exercice 9. ●○○ Pour chaque couple de propositions, expliciter en français la différence entre les deux.

1. (dans cette question, on précisera quel énoncé est vrai et lequel est faux)

(a) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N},\ n \leqslant N$.

(b) $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \leqslant N$.

Correction

Dans le premier énoncé, on demande que pour chaque n dans $\mathbb{N}$, il existe un N **dépendant de** n tel que $n \leqslant N$. L'énoncé est donc vrai sans problème : **soit** n dans $\mathbb{N}$. **Posons** $N = n$. Alors $n \leqslant N$.
En revanche, dans le second, on demande qu'il existe N **indépendant de** $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leqslant N$, i.e. on veut trouver un entier qui soit plus grand que tous les autres : c'est impossible, l'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.

2. (dans cette question, on dira quelles sont les f qui vérifient le premier énoncé, et quelles sont celles qui vérifient le second) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction.

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) = y$.

(b) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = y$.

Correction

Dans le premier énoncé, on dit simplement que tout élément de $\mathbb{R}$ admet une image par f : le y du premier énoncé **dépend de** x.
En revanche, dans le second énoncé, on demande que le y soit indépendant du x choisi : en d'autres termes, on dit que la fonction est constante.

Exercice 10. ●◐○ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Exprimer avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Correction

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$.

2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive.

Correction

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0.$

3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Correction

$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M.$

4. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'annule.

Correction

$\exists n \in \mathbb{N},\ u_n = 0.$

5. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle.

Correction

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0.$

Exercice 11. ●◐○ Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I. Exprimer les négations des assertions suivantes :

1. $\forall x \in \mathrm{I}, f(x) \neq 0.$

Correction

$\exists x \in \mathrm{I},\ f(x) = 0.$

2. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathrm{I}, f(x) = y$

Correction

$\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \neq y.$

3. $\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$

Correction

$\exists (x, y) \in \mathrm{I}^2,\ x \leqslant y$ et $f(x) > f(y).$

4. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathrm{I}, f(x) \leqslant M$

Correction

$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathrm{I},\ f(x) > M.$

Exercice 12. ●●◐ Nier les énoncés suivants.

1. $\forall x \in A,\ \exists y \in B, (x \in C \text{ et } (x,y) \in D) \text{ ou } x \notin C$.

Correction

$\exists x \in A,\ \forall y \in B,\ (x \notin C \text{ ou } (x,y) \notin D) \text{ et } x \in C$.

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ ((x,y) \in A \Rightarrow x \in B)$.

Correction

$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x,y) \in A \text{ et } x \notin B$.

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ (\exists y \in \mathbb{R},\ (x,y) \in A) \Rightarrow x \in B$.

Correction

$\exists x \in \mathbb{R},\ (\exists y \in \mathbb{R},\ (x,y) \in A) \text{ et } x \notin B$.

Expliquer la différence entre les deux dernières phrases.

Correction

Appelons la première proposition $\mathcal{P}$ et la seconde $\mathcal{Q}$.
Les deux propositions n'ont rien à voir ! Dans le première, c'est que pour tout x, on a un « indicateur » y tel que si (x,y) est dans A, alors x est dans B.
Dans la seconde en revanche, pour tout x, si on arrive à trouver y tel que (x,y) est dans A, alors x est dans B.
Afin d'y voir plus clair, exprimons-les sans utiliser le symbole d'implication. $\mathcal{P}$ est équivalente à

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ (x,y) \notin A \text{ ou } x \in B,$$

c'est-à-dire, comme la proposition $x \in B$ ne dépend pas de y,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\exists y \in \mathbb{R},\ (x,y) \notin A) \text{ ou } x \in B,$$

La proposition $\mathcal{Q}$ est équivalente à

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\forall y \in \mathbb{R},\ (x,y) \notin A) \text{ ou } x \in B$$

Ainsi, on voit clairement que $\mathcal{Q}$ implique $\mathcal{P}$. En revanche l'implication réciproque est fausse. Soient $A = \{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \emptyset$. Alors $\mathcal{P}$ est vraie : **soit** x dans $\mathbb{R}$. Soit $y = x+1$. Alors $(x,y) \notin A$. En revanche, $\mathcal{Q}$ est fausse ! En effet, prenons $x = 0$ et $y = 1$. Alors $(x,y) \notin A$ et $x \notin B$, donc $\overline{\mathcal{Q}}$ est vraie, donc $\mathcal{Q}$ est fausse.

Exercice 13. *Quelques exemples fonctionnels*. ●●○ Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Traduire « f n'est pas identiquement nulle ».

Correction

$\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0.$

2. On dit que f vérifie

- la propriété $\mathscr{C}$ si $\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0,\ \forall y \in \mathbb{R},\ |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$.
- la propriété $\mathscr{UC}$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$.

(a) Démontrer que $\mathscr{UC} \Rightarrow \mathscr{C}$.

Correction

Supposons $\mathscr{UC}$. Démontrons que $\mathscr{C}$. Soit $\varepsilon > 0$.
Alors par $\mathscr{UC}$, on dispose de η_0 tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. **Posons** $\eta = \eta_0$. Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $|x-y| \leqslant \eta$. Alors par 1, $|f(x) - g(y)| \leqslant \varepsilon$.
Donc f vérifie $\mathscr{C}$.

(b) Démontrer que $x \mapsto 2x$ vérifie $\mathscr{UC}$.

Correction

Soit $\varepsilon > 0$.

...au brouillon...

On veut que $|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$, donc que $|2x-2y| \leqslant \varepsilon$, donc que $|x-y| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Et on se rend compte que cette quantité ne dépend pas de x et de y : on peut la poser !

Posons $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$. Soient (x, y) dans $\mathbb{R}$ tels que $|x-y| \leqslant \eta$. Alors

$$|f(x)-f(y)| = |2x-2y| = 2|x-y| \leqslant 2\frac{\eta}{2} = \eta.$$

(c) Démontrer que $x \mapsto x^2$ vérifie $\mathscr{C}$ mais pas $\mathscr{UC}$.

Correction

- Démontrons déjà que la fonction vérifie $\mathscr{C}$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $\eta > 0$.

...au brouillon...

On veut trouver à quelle distance y doit être de x pour que $|x^2-y^2| \leqslant \varepsilon$. Mais

$$|x^2-y^2| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow |x-y|.|x+y| \leqslant \varepsilon.$$

Là, c'est un peu délicat, car on veut que $|x-y| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{|x+y|}$. Mais, si on y pense, y sera très proche de x (c'est l'idée de cette proposition !). On peut faire en sorte d'imposer que $|x-y| \leqslant 1$, donc $|x+y| \leqslant |x|+|y| \leqslant 2.|x|+1$. En imposant $\eta \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2.|x|+1}$ **et** $\eta \leqslant 1$, les choses devraient marcher... !

Posons $\eta = \min\left(\dfrac{\varepsilon}{2.|x|+1}, 1\right)$. Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $|x-y| \leqslant \eta$. Alors

$$\begin{aligned}
|x^2-y^2| &= |x-y|.|x+y| \\
&\leqslant \eta|x+y| \\
&\leqslant \eta(|x|+|y|) \\
&\leqslant \eta(2.|x|+1) \text{ car } |y| = |y-x+x| \leqslant |y-x|+|x| \leqslant 1+|x| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2.|x|+1}(2.|x|+1) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc f vérifie $\mathscr{C}$.

- Démontrons que f ne vérifie pas $\mathscr{UC}$, i.e. que

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x-y| \leqslant \eta \text{ et } |x^2-y^2| \geqslant \varepsilon.$$

...au brouillon...

L'idée est de trouver un écart entre deux valeurs de la fonction, qui puisse être atteint avec des valeurs de plus en plus espacées.

Posons $\varepsilon = 2$. Soit $\eta > 0$. Posons $x = \dfrac{1}{\eta}$ et $y = \dfrac{1}{\eta} + 1$. Alors $|x-y| \leqslant \eta$ et

$$\left|x^2-y^2\right| = \left|\frac{1}{\eta^2} - \eta^2 - 2 - \frac{1}{\eta^2}\right| = 2 + \eta^2 \geqslant 2,$$

d'où le résultat !

3 Ensembles

Exercice 14. ◐○○ Décrire $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$ où a désigne un élément.

Correction

Décrivons déjà $\mathcal{P}(a)$: $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$, donc $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\})) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}\ \}$

Exercice 15. ●●○ Soient a, b deux réels tels que $b - a > 2$.

1. Déterminer

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right].$$

Correction

ATTENTION ! CELA N'A PAS DE SENS DE PARLER DE LIMITE D'ENSEMBLES ! C'est déjà suffisamment dur de parler de limites de réels (vous le verrez au chapitre 6). Vous ne parlerez de limites d'ensembles qu'en spé, et pas de cette manière.

En faisant un dessin, on a envie de dire que $A =]a, b[$. Démontrons-le par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ **Soit** x dans A. Alors **on dispose de** $n \geqslant 1$ tel que $x \in \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]$. Or, $a + \frac{1}{n} \in]a, b[$, $b + \frac{1}{n} \in]a, b[$ et $a + \frac{1}{n} < b - \frac{1}{n}$. Donc $x \in]a, b[$. D'où $A \subset]a, b[$.

$\boxed{\supset}$ **Soit** x dans $]a, b[$. L'idée est assez simple : il faut prendre un n assez grand pour que le segment contienne x. Posons $\varepsilon = \min(x - a, b - x)$, et $n_0 \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, i.e. $\varepsilon \geqslant \frac{1}{n_0}$. Alors $x - a \leqslant \varepsilon$ et $b - x \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire que $x \geqslant a + \varepsilon \geqslant a + \frac{1}{n_0}$ et $x \leqslant b - \varepsilon \leqslant b - \frac{1}{n_0}$, d'où $x \in \left[a + \frac{1}{n_0}, b - \frac{1}{n_0}\right]$, d'où $x \in A$. Donc $A \subset]a, b[$, d'où l'égalité.

2. Déterminer

$$B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right[.$$

Correction

De même, on va montrer que $B = [a, b]$.

$\boxed{\subset}$ **Soit** x dans B. Alors $\forall n \geqslant 1$, $a - \frac{1}{n} < x < b + \frac{1}{n}$. En prenant la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient (**attention** aux inégalités larges !) $a \leqslant x \leqslant b$.

$\boxed{\supset}$ **Soit** x dans $[a, b]$. Soit $n \geqslant 1$. Alors $x > a - \frac{1}{n}$ et $x < b + \frac{1}{n}$, donc $x \in \left]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right[$.

Exercice 16. Soient E un ensemble, A, B et C trois parties de E. Montrer les propositions suivantes :

1. $(A \cup B = E) \Leftrightarrow (\overline{B} \subset A)$ (où $\overline{B}$ désigne le complémentaire de B dans E)

Correction

Procédons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ **Supposons que** $A \cup B = E$. **Montrons que** $\overline{B} \subset A$.
Soit $x \in \overline{B}$. Alors $x \in E$ et on sait que $E = A \cup B$, donc $x \in A$ **ou** $x \in B$. Comme $x \notin B$, $x \in A$. **Donc** $\overline{B} \subset A$.

$\boxed{\Leftarrow}$ **Supposons que** $\overline{B} \subset A$. **Montrons que** $A \cup B = E$. Comme $A \cup B \subset E$, **il suffit de montrer que** $E \subset A \cup B$.
Soit $x \in E$.
Si $x \in B$, alors $x \in A \cup B$.
Si $x \notin B$, alors $x \in \overline{B}$, donc $x \in A$, donc $x \in A \cup B$.
Les conclusions des différents cas de la disjonction étant les mêmes, on en déduit que $x \in A \cup B$. Donc $E \subset A \cup B$, donc $E = A \cup B$.

2. $\big((A \cup B \subset A \cup C)$ et $(A \cap B \subset A \cap C)\big) \Rightarrow (B \subset C)$

Correction

Supposons que $(A \cup B \subset A \cup C)$ et $(A \cap B \subset A \cap C)$. **Montrons que** $B \subset C$.
Soit x dans B.

- **Si** $x \in A$, alors $x \in A \cap B$. **Donc** $x \in A \cap C$. **Donc** $x \in C$.
- **Si** $x \notin A$, on sait que $x \in B \subset A \cup B$. Donc $x \in A \cup C$. **Or**, $x \notin A$. Donc $x \in C$.

Dans les deux cas on arrive à la même conclusion, donc $x \in C$. Donc $B \subset C$.

Exercice 17. ●●◐ Soit E un ensemble, A et B des sous-ensembles de E. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$:

1. $A \cap X = B$.

2. $A \cup X = B$.

Correction

Commençons par énoncer une propriété :

Proposition 1

Soit E un ensemble, $A \subset E$. Alors, pour tout $X \subset E$, $X = (X \cap A) \cup (X \cap \overline{A})$.

Démonstration. Soit $X \subset E$. On sait que $(X \cap A) \subset X$ et $(X \cap \overline{A}) \subset X$ donc $(X \cap A) \cup (X \cap \overline{A}) \subset X$. Réciproquement, montrons que $X \subset (X \cap A) \cup (X \cap \overline{A})$.
Soit $x \in X$. Alors

- soit $x \in A$, donc $x \in A \cap X$. Donc $x \in (X \cap A) \cup (X \cap \overline{A})$.
- soit $x \notin A$, donc $x \in \overline{A} \cap X$. Donc $x \in (X \cap A) \cup (X \cap \overline{A})$.

Donc $X = (X \cap A) \cup (X \cap \overline{A})$. □

Résolvons maintenant l'exercice.

1. Résolvons par analyse-synthèse l'équation $A \cap X = B$.
Analyse. Supposons que $A \cap X = B$ ait des solutions.
Alors, nécessairement, $B \subset A$.
Soit alors X tel que $A \cap X = B$. Comme $X = (X \cap A) \cup (X \cap \overline{A})$, on a
   - $X \cap A = B$ par l'équation.
   - $X \cap \overline{A}$ est quelconque.

   Donc $X \in \{B \cup Y,\ Y \in \mathcal{P}(\overline{A})\}$.
Synthèse.
   - si B n'est pas inclus dans A, alors il existe un élément x de B tel que $x \notin A$. Donc quel que soit X partie de E, $x \notin A \cap X$, c'est-à-dire que pour toute partie X de E, $A \cap X \neq B$.
   - si B est inclus dans A, montrons que l'ensemble des solutions de $A \cap X = B$ est $\mathcal{E} = \{B \cup Y,\ Y \in \mathcal{P}(\overline{A})\}$. On sait par l'analyse que l'ensemble des solutions est inclus dans $\mathcal{E}$.
Pour montrer l'inclusion inverse, soit X dans $\mathcal{E}$. Alors $X = B \cup Y$, avec $Y \in \mathcal{P}(\overline{A})$. Donc $X \cap A = (B \cup Y) \cap A = (B \cap A) \cup (Y \cap A)$. Comme $B \subset A$, $B \cap A = B$. Comme $Y \subset \overline{A}$, $Y \cap A = \emptyset$. Donc $X \cap A = B$. Donc $\mathcal{E}$ est bien l'ensemble des solutions de $X \cap A = B$.
2. Résolvons de la même manière $A \cup X = B$.
Analyse. Déjà, par définition, $A \subset A \cup X$, donc $A \subset B$ nécessairement.
Ensuite, si X est solution de $A \cup X = B$, écrivons encore $X = (X \cap A) \cup (X \cap \overline{A})$. Alors
$$A \cup (X \cap A) \cup (X \cap \overline{A}) = [A \cup (X \cap A)] \cup (X \cap \overline{A}) = A \cup (X \cap \overline{A}),$$
car $(X \cap A) \subset A$. De même, $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) = A \cup (B \cap \overline{A})$. L'équation s'écrit alors
$$A \cup (X \cap \overline{A}) = A \cup (B \cap \overline{A}).$$
Comme A et $\overline{A}$ sont disjoints, on en déduit que $X \cap \overline{A} = B \cap \overline{A}$. Donc
$$X \subset \{Y \cup (B \cap \overline{A}),\ Y \subset A\}.$$
Synthèse.
   - si A n'est pas inclus dans B, alors il existe x dans A tel que $x \notin B$. Pour toute partie X de E, $A \cup X$ contient x et ne peut donc être égal à B.
   - supposons maintenant $A \subset B$. On a montré dans l'analyse que toute solution de $A \cup X = B$ est dans
$$\mathcal{F} = \{Y \cup (B \cap \overline{A}),\ Y \subset A\}.$$
Soit alors X dans $\mathcal{F}$. Alors il existe Y dans A tel que $X = Y \cup (B \cap \overline{A})$. On a donc
$$\begin{aligned} A \cup X &= A \cup Y \cup (B \cap \overline{A}) \\ &= (A \cup Y) \cup (B \cap \overline{A}) \\ &= A \cup (B \cap \overline{A}) \text{ car } Y \subset A \\ &= (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) \text{ car } A \subset B \\ &= B \text{ par la proposition.} \end{aligned}$$
Donc l'ensemble des solutions est bien $\mathcal{F}$.

Exercice 18. ●●○ Démontrer que la partie A de $\mathbb{R}^2$ définie par $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leqslant 1\}$ n'est pas un produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

Correction

Supposons que $A = B \times C$ où $B \subset \mathbb{R}$ et $C \subset \mathbb{R}$. Comme $(1,0) \in A$, on en déduit que $1 \in B$.
De même, $(0,1) \in A$, donc $1 \in C$.
Mais $(1,1) \notin A$ car $1^2 + 1^2 > 1$, contradiction avec le fait que $A = B \times C$.

Exercice 19. ●●◐ Soit E un ensemble, éventuellement vide, dont les éléments sont des ensembles. On dit que E est **transitif** si

$$\forall x \in E,\ x \subset E.$$

1. Si $E = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, a-t-on $\{1\} \in E$? A-t-on $\{1\} \subset E$? E est-il alors transitif ?

Correction

On a bien $\{1\} \in E$, mais $\{1\}$ n'est pas inclus dans E car $1 \notin E$. $\boxed{\text{Donc } E \text{ n'est pas transitif.}}$

2. Les ensembles suivants sont-ils transitifs ?

$$A = \emptyset,\ B = \{\emptyset\},\ C = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

Correction

Pour A : l'ensemble vide vérifie toutes les propriétés universelles donc $\forall x \in A,\ x \subset A$. $\boxed{\text{Donc } A \text{ est transitif}}$.
Pour B : $\boxed{\text{l'ensemble } B \text{ est transitif}}$, car le seul élément de B est $\emptyset$ et $\emptyset \subset B$ (l'ensemble vide est inclus dans tous les ensembles).
Pour C : $\boxed{\text{l'ensemble } C \text{ est transitif}}$ car

- $\emptyset \in C$ et $\emptyset \subset C$.
- $\{\emptyset\} \in C$ et $\{\emptyset\} \subset C$.

3. Soit X un ensemble quelconque. On définit la suite d'ensembles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence ainsi : $X_0 = X$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = \mathcal{P}(X_n).$$

(a) Si $X = \emptyset$, déterminer X_0, X_1, X_2, X_3.

Correction

Si $X = \emptyset$, $X_0 = \emptyset$, $X_1 = \{\emptyset\}$, $X_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ et

$$\boxed{X_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, X_2\}.}$$

(b) Si $X = \{1,3\}$, déterminer X_2.

Correction

Si $X = \{1,3\}$, $X_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}\}$ et

$$\boxed{\begin{aligned} X_2 = \{&\emptyset, \\ &\{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\{3\}\}, \{1,3\}, \\ &\{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{3\}\}, \{\emptyset, \{1,3\}\}, \{\{1\}, \{3\}\}, \{\{1\}, \{1,3\}\}, \{\{3\}, \{1,3\}\}, \\ &\{\emptyset, \{1\}, \{3\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{1,3\}\}, \{\emptyset, \{3\}, \{1,3\}\}, \{\{1\}, \{3\}, \{1,3\}\}, \\ &\{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}\}\} \end{aligned}}$$

(c) Montrer que si X est transitif, alors pour tout n dans $\mathbb{N}$, X_n est transitif.

Correction

Supposons que X est transitif.
Démontrons par récurrence pour tout n dans $\mathbb{N}$, X_n est transitif.
Initialisation. Par définition, $X_0 = X$. Donc X_0 est transitif par hypothèse.
Hérédité. Supposons que X_n est vraie pour un certain entier naturel n. Alors $X_{n+1} = \mathcal{P}(X_n)$.
Soit x dans X_{n+1}. Montrons que $x \subset X_{n+1}$.
Comme $x \in X_{n+1}$, $x \in \mathcal{P}(X_n)$ donc $x \subset X_n$.
Donc $\forall a \in x,\ a \in X_n$.
Donc, **par transitivité de** X_n, $\forall a \in x$, $a \subset X_n$.
Donc, $\forall a \in x,\ a \in X_{n+1}$.
Donc $x \subset X_{n+1}$.
D'où la transitivité de X_{n+1}.
Conclusion. Héréditaire et vraie au rang 0, la proposition est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$, donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n \text{ est transitif.}}$$

4. Montrer que si Y est un un ensemble transitif, $Y \cup \{Y\}$ est transitif.

Correction

Soit Y un ensemble transitif. Montrons que $Y \cup \{Y\}$ est transitif.
Soit $x \in Y \cup \{Y\}$. Montrons que $x \subset Y \cup \{Y\}$.
Raisonnons par disjonction des cas.
Si $x \in Y$**.** Comme Y est transitif, $x \subset Y$. Donc $x \subset Y \cup \{Y\}$.
Sinon, $x \in \{Y\}$**,** donc $x = Y$. Or, $Y \subset Y \cup \{Y\}$, donc $x \subset Y \cup \{Y\}$.
Donc $Y \cup \{Y\}$ est transitif.

Si X est un ensemble, X est dit héréditairement transitif si tout élément de $X \cup \{X\}$ est transitif.

5. Montrer que tout élément d'un ensemble héréditairement transitif est héréditairement transitif.

Correction

Soit X un ensemble héréditairement transitif. Soit $a \in X$. Montrons que tout élément de $a \cup \{a\}$ est transitif.
Soit $x \in a \cup \{a\}$.

- si $x = a$, alors, comme $a \in X \subset X \cup \{X\}$ et que X est héréditairement transitif, a est héréditairement transitif.
- sinon, $x \in a$, mais, comme X est transitif, $a \subset X$, donc $x \in X \cup \{X\}$, donc, par transitivité héréditaire, x est transitif.

6. Si on définit $A_0 = \emptyset$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\}$, démontrer que l'ensemble

$$N = \{A_k,\ k \in \mathbb{N}\}$$

est héréditairement transitif.
Point culture : on vient de construire les entiers naturels à la manière de von Neumann. On a même construit ce que l'on appelle le premier **ordinal**. Mais ceci doit attendre le chapitre 5 pour être prolongé !

Correction

- Déjà, montrons par récurrence que chacun des A_k est transitif.
  Initialisation. $A_0 = \emptyset$, qui est transitif.
  Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que A_k est transitif. Alors, par la question 4., $A_k \cup \{A_k\}$ est transitif, donc A_{k+1} est transitif.
  D'où le résultat par le principe de récurrence.
  Donc tout élément de N est transitif.

- Reste à montrer que N est transitif. Par récurrence immédiate, on remarque que pour tout entier naturel k,

$$A_k = \{A_\ell, \ell \in [\![0, k-1]\!]\}.$$

  Soit $A \in N$, $k \in \mathbb{N}$ tel que $A = A_k$. Alors si $x \in A$, on dispose de $\ell \in [\![0, k-1]\!]$ tel que $x = A_\ell$. Mais alors $x \in N$ par définition de N.
  On a donc montré que $A \subset N$, donc N est transitif.

Donc N est héréditairement transitif.

4 Quelques raisonnements typiques

Exercice 20. ●○○

1. Soit p un nombre premier. Montrer que $\sqrt{p}$ n'est pas rationnel.

Correction

Il s'agit du même argument que celui du cours. **Par l'absurde**, supposons que p est rationnel. Alors on dispose de a dans $\mathbb{Z}$ et b dans $\mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{p} = \dfrac{a}{b}$ **et** tels que a et b n'aient pas de diviseur commun. Alors $pb^2 = a^2$. Alors p divise a^2, donc p divise a, donc on dispose d'un entier k tel que $a = kp$, donc $pb^2 = p^2k^2$, i.e. $b^2 = pk^2$, donc, par le même argument que précédemment, p divise b, donc p est un diviseur commun à a et b, absurde !
Donc $\sqrt{p}$ est irationnel.

2. ●●◐ (ne pas faire si vous n'avez pas fait spé maths) Un entier naturel n est un carré parfait si : $\exists m \in \mathbb{N},\ n = m^2$.
Soit n dans $\mathbb{N}$. Montrer que si n n'est pas un carré parfait, alors $\sqrt{n}$ est irrationnel.

Correction

Ce n'est pas nécessairement une question difficile, mais elle demande des notions d'arithmétique, d'où sa classification en ●●◐ . On écrit $\sqrt{n} = \dfrac{a}{b}$, d'où $\dfrac{a^2}{b^2} = n$. On peut de plus supposer que a et b n'ont pas de diviseur commun. Alors $b = 1$. En effet, si p était un diviseur premier de b, alors p ne serait pas un diviseur de a, donc, **comme** p **est premier**, ne serait pas un diviseur de a^2. Absurde car $\dfrac{a^2}{b^2}$ est entier. Donc $b = 1$ et $a^2 = n$, donc n est un carré parfait.

Exercice 21. ●○○ Soient a et b deux réels tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ x < a \Rightarrow x \leqslant b$.
Démontrer que $a \leqslant b$.

Correction

On fait un raisonnement par l'absurde. Supposons que $a > b$.
Posons alors $x = \dfrac{a+b}{2}$. Alors $b < x < a$, donc $x < a$ **et** $x > b$, ce qui nie l'implication $x < a \Rightarrow x \leqslant b$. Absurde.
Donc $a \leqslant b$.
Remarque fondamentale. En fait, ce raisonnement est un raisonnement par contraposée déguisé ! Ce qu'on vous demande de démontrer, c'est

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ (\forall x \in \mathbb{R},\ x < a \Rightarrow x \leqslant b) \Rightarrow \leqslant b.$$

Exercice 22. *Densité des irationnels dans les réels*. ●●○ On rappelle que les rationnels sont les éléments de $\mathbb{Q}$ et les irationnels sont les éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1. Montrer que la somme de deux rationnels est rationnelle.

Correction

Soient x et y deux rationnels. Alors **on dispose de** $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et de $(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$

tels que $x = \dfrac{p}{q}$ et $y = \dfrac{r}{s}$. Alors

$$x + y = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs},$$

avec $ps + qr \in \mathbb{Z}$ et $qs \in \mathbb{N}$, donc $x + y \in \mathbb{Q}$. D'où le résultat.

2. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{Q}$, pour tout y dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Correction

Soit x dans $\mathbb{Q}$ et y dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **Par l'absurde, supposons que** $x + y$ est rationnel. Alors $x + y \in \mathbb{Q}$, $-x \in \mathbb{Q}$, donc $x + y - y \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire que $y \in \mathbb{Q}$. **Absurde !**
Donc $x + y \notin \mathbb{Q}$.

3. Montrer que pour tout y dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{y}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Correction

Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, **soit** $n \in \mathbb{N}^*$. **Par l'absurde, supposons que** $\dfrac{y}{n} \in \mathbb{Q}$. Alors **on dispose de** p dans $\mathbb{Z}$ et de q dans $\mathbb{N}^*$ tels que $\dfrac{y}{n} = \dfrac{p}{q}$. Alors $y = \dfrac{np}{q}$, **absurde** ! Donc $\dfrac{y}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Si $A \subset \mathbb{R}$, on dit que A est **dense** dans $\mathbb{R}$ si elle vérifie la propriété

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in A,\ |x - y| \leqslant \varepsilon.$$

4. (Bonus) Montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
On déclarera proprement les variables, et on fera une disjonction de cas selon que le réel déclaré x appartient à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ou à $\mathbb{Q}$.

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$. **Soit** $\varepsilon > 0$. **Cherchons** y dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $|x - y| \leqslant \varepsilon$.

- **Si** $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, **posons** $y = x$. Alors $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $|x - y| = 0 \leqslant \varepsilon$.
- **Si** $x \in \mathbb{Q}$, **soit** $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{a}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (question 3.) et, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $x + \dfrac{a}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (question 2.).

  Au brouillon : on cherche maintenant n tel que $\left|x - \left(x + \dfrac{a}{n}\right)\right| \leqslant \varepsilon$, i.e. $\dfrac{|a|}{n} \leqslant \varepsilon$. Il suffit d'avoir $n \geqslant \dfrac{|a|}{\varepsilon}$ ce qui est toujours possible.

  Prenons n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant \dfrac{|a|}{\varepsilon}$. **Posons** $y = x + \dfrac{a}{\varepsilon}$. Alors $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et

$$|x - y| = \left|x - \left(x + \frac{a}{n}\right)\right| = \frac{|a|}{n}.$$

  Or, $n \geqslant \dfrac{|a|}{\varepsilon}$ donc $\dfrac{|a|}{n} \leqslant \varepsilon$, donc $|x - y| \leqslant \varepsilon$, d'où le résultat !

Exercice 23. ●○○ On montre par récurrence que quelle que soit la trousse, tous les stylos de cette trousse sont de même couleur.
Initialisation. Soit une trousse à un seul stylo. La proposition est évidente.
Hérédité. Supposons que toute trousse de n stylos ait tous ses stylos de même couleur. Soit une trousse de $n + 1$ stylos. Retirons un stylo à cette trousse. Les n restants sont de même couleur. Remettons ce stylo et prenons-en un autre. Les n restants sont aussi de même couleur, donc tous les stylos sont de même couleur.
Héréditaire et vraie au rang 1, la proposition est donc vraie pour tout entier n : toute trousse a donc ses stylos de même couleur !
Où est l'erreur ?

Correction

Le raisonnement est parfaitement juste, jusqu'au moment où on écrit « Les n restants sont aussi de même couleur, **donc** tous les stylos sont de même couleur. » Ce « donc » n'est vrai que si l'on peut comparer les deux paquets de n stylos à un même autre stylo, i.e. s'il y a + de 3 stylos dans la trousse. Donc l'hérédité ne peut se faire que pour $n \geqslant 2$, donc l'initialisation doit se faire à $n = 2$, ce qui n'est pas possible !

Exercice 24. ●○○ Déterminer une expression explicite du terme général des suites suivantes :

1. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2(n+1)u_n \end{cases}$$

Correction

Au brouillon, regardons les premiers termes de la suite : $u_0 = 1$, $u_1 = 2 \times 1 \times u_0 = 2$, $u_2 = 2 \times 2 \times 2 = 2! \times 2^2$, $u_3 = 2 \times 3 \times 8 = 3! \times 2^3$, $u_4 = 2 \times 4 \times 3! \times 2^3 = 4! \times 2^4$.
Montrons par récurrence que pour tout n, la proposition $\mathcal{P}_n$: $u_n = n!2^n$ est vraie.
Initialisation. $u_0 = 0!2^0$, donc l'initialisation est vérifiée.
Hérédité. Supposons que pour un certain n, $u_n = n!2^n$. Alors $u_{n+1} = 2(n+1)u_n = 2(n+1)n!2^n = (n+1)!2^{n+1}$. D'où l'hérédité.
Conclusion. Héréditaire et vraie au rang 0, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

2. la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) v_n \end{cases}$$

Correction

Au brouillon, $v_0 = 1$, $v_1 = 2v_0 = 2$, $v_2 = \left(1 + \dfrac{1}{2}\right) v_1 = \dfrac{3}{2} \times 2 = 3$, $v_3 = \left(1 + \dfrac{1}{3}\right) v_2 = \dfrac{4}{3} \times 3 = 4$.
Montrons par récurrence que pour tout n, la proposition $\mathcal{Q}_n$: $v_n = n + 1$ est vraie.
Initialisation. $u_0 = 1$, donc l'initialisation est vérifiée.
Hérédité. Supposons que pour un certain n, $u_n = n+1$. Alors $u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) v_n = \dfrac{n+2}{n+1} v_n = \dfrac{n+2}{n+1}(n+1)$ par hypothèse de récurrence. Donc $v_{n+1} = n+2$. D'où l'hérédité.
Conclusion. Héréditaire et vraie au rang 0, $\mathcal{Q}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 25. ●○○ On considère la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $t_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} = t_n - t_n^2$. Montrer que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0, 1]$, i.e. $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant t_n \leqslant 1$.

Correction

Correction de l'exercice 1. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, la proposition

$$0 \leqslant t_n \leqslant 1 \qquad (\mathcal{P}_n)$$

est vraie

Initialisation. $t_0 = \dfrac{1}{2} \in [0, 1]$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité. Supposons que $0 \leqslant t_n \leqslant 1$ pour un certain entier naturel n. Alors

- $t_n \geqslant 0$ et $1 - t_n \geqslant 0$, donc $t_n(1 - t_n) \geqslant 0$, donc $t_{n+1} \geqslant 0$.
- $0 \leqslant t_n \leqslant 1$ et $0 \leqslant 1 - t_n \leqslant 1$, donc $t_{n+1} \leqslant 1$.

D'où $\mathcal{P}_{n+1}$.

Conclusion. Héréditaire et vraie au rang 0, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n par le principe de récurrence.

Exercice 26. *Autour des nombres de Fibonacci*. ●●○ On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$F_0 = 0,\ \ F_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Calculer les 6 premiers termes de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction

On calcule $F_2 = F_0 + F_1 = 1$, $F_3 = F_1 + F_2 = 2$, $F_4 = F_2 + F_3 = 3$, $F_5 = F_3 + F_4 = 3 + 2 = 5$, $F_6 = F_3 + F_4 = 5 + 3 = 8$.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$.

Correction

Montrons le résultat par récurrence sur n dans $\mathbb{N}$. On pose $\mathcal{P}_n$ la proposition « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$ ».

Initialisation. Pour $n = 0$, $F_2 - 1 = 1 - 1 = 0 = F_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{0} F_k$, d'où l'initialisation.

Hérédité. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} F_k &= \sum_{k=0}^{n} F_k + F_{n+1}\\ &= F_{n+2} + F_{n+1} - 1 \text{ d'après l'hypothèse de récurrence.}\\ &= F_{n+3} - 1,\end{aligned}$$

d'où l'hérédité.

Héréditaire et vraie au rang 0, la proposition est vraie d'après le principe de récurrence.

3. Montrer que pour tous p dans $\mathbb{N}^*$ et q dans $\mathbb{N}$, $F_pF_{q+1} + F_{p-1}F_q = F_{p+q}$.
On pourra procéder par récurrence sur p ou sur q.

Correction

Montrons par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$ la proposition suivante :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ F_pF_{q+1} + F_{p-1}F_q = F_{p+q}. \qquad (\mathcal{A}_q)$$

Initialisation. On prend $q = 0$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors $F_pF_{q+1} + F_{p-1}F_q = F_pF_1 + F_{p-1}F_0 = F_p = F_{p+q}$, d'où l'initialisation.
Hérédité. Supposons que $\mathcal{A}_q$ est vraie pour un certain q. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} F_pF_{q+1+1} + F_{p-1}F_{q+1} &= F_pF_{q+2} + F_{p-1}F_{q+1} \\ &= F_p(F_{q+1} + F_q) + F_{p-1}F_{q+1} \\ &= (F_p + F_{p-1})F_{q+1} + F_pF_q \\ &= F_{p+1}F_{q+1} + F_pF_q \\ &= F_{p+1+q} \text{ par l'hypothèse de récurrence (valable } \textbf{pour tout } p\text{),} \end{aligned}$$

d'où l'hérédité, et le résultat par le principe de récurrence !

4. Si a et b sont deux entiers naturels, on dit que a divise b s'il existe k dans $\mathbb{N}$ tel que $b = ka$. Montrer que pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, pour tout k dans $\mathbb{N}$, F_p divise F_{kp}.

Correction

Démontrons le résultat par récurrence sur k. Soit p dans $\mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B}_k$ la proposition « F_p divise F_{kp} ».
Initialisation. Si $k = 0$, $F_0 = 0$ et tout entier divise 0 donc F_p divise F_0.
Hérédité. Supposons que F_p divise F_{kp} pour un certain k. Alors par la formule précédente,

$$F_{(k+1)p} = F_{kp+p} = F_{kp}F_{p+1} + F_{kp-1}F_p.$$

Or, F_p divise F_{kp} donc on dispose de a dans $\mathbb{Z}$ tel que $F_{kp} = aF_p$. Donc

$$F_{(k+1)p} = aF_pF_{p+1} + F_{kp-1}F_p = (aF_{p+1} + F_{kp-1})F_p,$$

donc F_p divise $F_{(k+1)p}$.
Héréditaire et vraie au rang 0, la proposition $\mathcal{B}_k$ est vraie pour tout k dans $\mathbb{N}$ par le principe de récurrence.

5. (Formule de Binet)

(a) Résoudre l'équation du second degré $x^2 - x - 1 = 0$. On note φ la solution strictement supérieure à 1 : montrer que l'autre solution de l'équation, que l'on notera φ', vérifie $\varphi' = -\dfrac{1}{\varphi}$.

Correction

Le discriminant de l'équation est $1+4=5$, d'où deux solutions $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, d'où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, et $\varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On remarque bien que

$$-\frac{1}{\varphi} = -\frac{2}{1+\sqrt{5}} = -\frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = -\frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

d'où le résultat.

(b) Montrer que pour tout entier naturel n, $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n)$.

Correction

On démontre le résultat par récurrence **double** sur n.
Initialisation. $F_0 = 0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^0 - \varphi'^0)$ et $F_1 = 1$, et $\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^1 - \varphi'^1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{2\sqrt{5}}{2} = 1$, d'où l'initialisation. **Hérédité.** On suppose que pour un certain n, $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n)$ et $F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1})$. Alors

$$\begin{aligned}
F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1}) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n(\varphi+1) - \varphi'^n(\varphi'+1)).
\end{aligned}$$

Or, $\varphi + 1 = \varphi^2$ et $\varphi'^2 = \varphi' + 1$ car φ est solution de l'équation du début, d'où

$$F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+2} - \varphi'^{n+2}),$$

d'où l'hérédité et le résultat par le principe de récurrence.

Exercice 27. ●●○

1. Déterminer le signe de la fonction $f : x \mapsto x^2 - x - 2$.

Correction

Il s'agit d'une question de Terminale ! Ou bien on remarque que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x+1)(x-2)$, ou bien on calcule le discriminant de ce polynôme.
On en déduit, par un tableau de signe, que f est négative sur $[-1, 2]$, positive ailleurs.

2. Déterminer l'ensemble des réels x tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x^{n+2} \leqslant x^{n+1} + 2x^n$.

Correction

Analyse. Soit x un tel réel. Prenons $n = 0$. Alors $x^2 \leqslant x + 1$, donc $x^2 - x - 2 \leqslant 0$, c'est-à-dire que $f(x) \leqslant 0$. Donc $x \in [-1, 2]$.
Prenons $n = 1$. Alors $x^3 - x^2 - x \leqslant 0$, c'est-à-dire que $xf(x) \leqslant 0$. Donc nécessairement, comme on sait déjà que $f(x)$ doit être négatif, x doit être positif. Donc $x \in [0, 2]$.
Là, si on teste d'autres n, il semble ne pas y avoir de problème.
Synthèse. Soit $x \in [0, 2]$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Alors $f(x) \leqslant 0$ et $x \geqslant 0$, donc $x^n \geqslant 0$. Donc $x^n f(x) \leqslant 0$ donc $x^{n+2} \leqslant x^{n+1} + 2x^n$.
Conclusion. L'ensemble des solutions du problème est $[0, 2]$.

3. Déterminer l'ensemble des réels x tels que : $\exists n \in \mathbb{N},\ x^{n+2} \leqslant x^{n+1} + 2x^n$.

Correction

Là, l'analyse-synthèse n'est pas évidente à cause du $\exists$. En revanche, il est plus simple de trouver l'ensemble des réels ne vérifiant pas la propriété. Cherchons l'ensemble des x dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x^{n+2} > x^{n+2} + 2x^n, \text{ i.e. } \forall n \in \mathbb{N},\ x^n f(x) > 0.$$

Analyse. Soit x un tel réel. Prenons $n = 0$. Alors $f(x) > 0$. Donc $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 2]$.
Prenons $n = 1$. Alors $xf(x) > 0$. Donc nécessairement, comme on sait déjà que $f(x)$ doit être strictement positif, x doit être strictement positif. Donc $x \in]2, +\infty[$.
Là, si on teste d'autres n, il semble ne pas y avoir de problème.
Synthèse. Soit $x \in]2, +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Alors $f(x) > 0$ et $x > 0$, donc $x^n > 0$. Donc $x^n f(x) > 0$ donc $x^{n+2} > x^{n+1} + 2x^n$.
Conclusion. L'ensemble des solutions du problème est $]2, +\infty[$.
Conclusion bis. L'ensemble des solutions du problème original est donc $\mathbb{R} \backslash]2, +\infty[$, c'est-à-dire $]-\infty, 2]$.

Exercice 28. ●◐○ Déterminer par analyse-synthèse toutes les fonctions f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ f(m + n) = f(m)f(n).$$

Correction

Analyse. Soit f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ f(m + n) = f(m)f(n)$.
Alors $f(0 + 0) = f(0)$, donc $f(0)^2 = f(0)$, donc $f(0) = 0$ ou 1.

- **si** $f(0) = 0$, alors pour tout entier naturel n, $f(n) = f(n + 0) = f(n)f(0) = 0$, donc f est la fonction constante nulle.
- **sinon**, $f(0) = 1$, et on remarque que $f(2) = f(1 + 1) = f(1)^2$, $f(3) = f(1 + 1 + 1) = f(1)^3$, etc. Montrons alors par récurrence que pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}_n : f(n) = f(1)^n$ est vraie.
  Initialisation. $f(0) = 1 = f(1)^0$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
  Hérédité. Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Alors $f(n+1) = f(n)f(1) = f(1)^n f(1) = f(1)^{n+1}$, par hypothèse de récurrence.

D'où l'hérédité.
Conclusion. Héréditaire et vraie au rang 0, la proposition est vraie pour tout entier naturel n.
Donc, dans ce cas, f est de la forme $n \mapsto a^n$ où a est un entier naturel.

Donc f est la fonction nulle, ou f est de la forme $n \mapsto a^n$ où a est un entier naturel.
Synthèse. Si f est la fonction nulle, alors pour tous n et m dans $\mathbb{N}$, $f(n+m) = 0 = 0 \times 0 = f(n)f(m)$.
Sinon, supposons que l'on dispose de a dans $\mathbb{N}$ tel que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $f(n) = a^n$.
Soient m et n dans $\mathbb{N}$. Alors

$$f(n+m) = a^{n+m} = a^n a^m = f(n)f(m).$$

Donc, dans ces deux cas, f vérifie la propriété désirée.
Donc les fonctions f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \ f(m+n) = f(m)f(n)$$

sont

- la fonction nulle,
- les fonctions de la forme $n \mapsto a^n$, où $a \in \mathbb{N}$.

Exercice 29. ●●○ On veut déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ f(n+1) \geqslant f(f(n)) + 1.$$

Analyse

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall m \in \mathbb{N}, \ m \geqslant n \Rightarrow f(m) \geqslant n$. *On pourra faire une récurrence sur l'une des deux variables.*

Correction

Montrons **par récurrence sur** n que

$$\forall m \in \mathbb{N},\ m \geqslant n \Rightarrow f(m) \geqslant n. \tag{$\mathcal{P}_n$}$$

Initialisation. Soit m dans $\mathbb{N}$ tel que $m \geqslant 0$. Alors, par définition, f est à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc $f(m) \geqslant 0$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité. Supposons que pour un certain entier naturel n,

$$\forall m \in \mathbb{N},\ m \geqslant n \Rightarrow f(m) \geqslant n.$$

Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$. **Soit** m dans $\mathbb{N}$ **tel que** $m \geqslant n+1$. Montrons que $f(m) \geqslant n+1$.
Par la formule (1), $f(m) \geqslant f(f(m-1)) + 1$. Or, $m-1 \geqslant n$, donc **par hypothèse de récurrence**, $f(m-1) \geqslant n$. Donc, **par la même hypothèse de récurrence**, $f(f(m-1)) \geqslant n$. Donc

$$f(m) \geqslant f(f(m-1)) + 1 \geqslant n+1,$$

d'où $\mathcal{P}_{n+1}$.
Conclusion. Héréditaire et vraie au rang 0, la propositon est vraie par le principe de récurrence.

2. En déduire que f est strictement croissante.

Correction

Comme f est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, il suffit de montrer qe pour tout n dans $\mathbb{N}$, $f(n+1) > f(n)$, i.e. que $f(n+1) \geqslant f(n)+1$.
Soit n dans $\mathbb{N}$. Alors $n+1 \geqslant n$. On sait par la question précédente que, comme $f(n) \geqslant f(n)$, $f(f(n)) \geqslant f(n)$, donc $f(n+1) \geqslant f(f(n)) + 1 \geqslant f(n)+1$, donc $f(n+1) > f(n)$, donc f est strictement croissante.

3. Montrer que pour tout entier naturel n, $f(n) < n+1$ et conclure l'analyse.

Correction

Faisons à nouveau la remarque – faite en cours – que si f est une fonction croissante, alors pour tous x et y, $f(x) \geqslant f(y) \Rightarrow x > y$. Ainsi, on sait que pour tout entier naturel, $f(n+1) \geqslant f(f(n))$, donc, par croissance $n+1 > f(n)$, d'où le résultat. Ensuite, f est **strictement croissante**, donc pour tout n, $f(n) \geqslant f(n-1)+1$ et, par une récurrenc immmédiate, on peut montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $f(n) \geqslant n$. Donc pour tout entier naturel n, $n \leqslant f(n) < n+1$ donc **pour tout** n **dans** $\mathbb{N}$**,** $f(n) = n$.

Synthèse

4. Effectuer la synthèse du problème.

Correction

Posons, pour tout entier naturel n, $f(n) = n$. Alors f est bien une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et, si n est dans $\mathbb{N}$, $f(n+1) = n+1$, et $f(f(n))+1 = f(n)+1 = n+1$, d'où le résultat !

Ainsi, la seule fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant la propriété « $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n+1) \geqslant f(f(n))+1$ » est la fonction $n \mapsto n$.

Exercice 30. Déterminer par analyse-synthèse l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Correction

Correction de l'exercice 2.
Analyse. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y$. En particulier, en prenant $y = 0$, on obtient pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x)f(0) - f(0) = x$. En prenant $x = 0$, on obtient $f(0)^2 - f(0) = 0$, donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Effectuons maintenant une disjonction de cas

- Si $f(0) = 0$, alors pour tout x dans $\mathbb{R}$, $0 - 0 = x$, absurde.
- Si $f(0) = 1$, alors pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) - 1 = x$, donc $f(x) = x + 1$.

Synthèse. Posons $f : x \mapsto x + 1$. Soient alors x et y dans $\mathbb{R}$. Alors

$$f(x)f(y) - f(xy) = (x+1)(y+1) - (xy+1) = xy + x + y + 1 - xy - 1 = x + y,$$

donc la fonction f vérifie bien l'équation souhaitée.
Conclusion. L'unique fonction vérifiant $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y$ est la fonction $x \mapsto x + 1$.

Exercice 31. ●●◐ Soit x un nombre réel tel que $x + \dfrac{1}{x}$ est un entier relatif. Montrer que pour tout entier n,

$$x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}.$$

Correction

Démontrons la proposition par récurrence double sur $\mathbb{N}$. **Initialisation.** La proposition est vraie au rang 0 car $2 \in \mathbb{Z}$ et au rang 1 car $\left(x^{1-1} + \dfrac{1}{x^{1-1}}\right) = 2 \in \mathbb{Z}$ et $\left(x + \dfrac{1}{x}\right) \in \mathbb{Z}$ par hypothèse.
Hérédité. Supposons que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies pour un certain n et montrons que $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie, c'est-à-dire que

$$\left(x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}}\right) \in \mathbb{Z}.$$

Remarquons que

$$\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) \times \left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+2} + x^n + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n+2}} = \left(x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}}\right) + \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right),$$

donc

$$\left(x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}}\right) = \left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) \times \left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right),$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

entier car somme de produits d'entiers (par hypothèse de récurrence).
Donc $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie.
Concluson. Doublement héréditaire et vraie au rangs 1 et 2, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel non nul par récurrence double.

Exercice 32. ●●● Démontrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. le principe de récurrence
2. toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément

Correction

On va raisonner par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$ supposons que le principe de récurrence est vrai. Démontrons alors par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$, la proposition

$$\text{toute partie de } \mathbb{N} \text{ contenant } n \text{ admet un plus petit élément} \qquad (\mathcal{P}_n)$$

- **Initialisation.** Soit A une partie de $\mathbb{N}$ contenant 0. Alors 0 est le plus petit élément de A.
- **Hérédité.** Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Soit alors A une partie de $\mathbb{N}$ contenant $n+1$. Alors :
  - si A contient n, par hypothèse de récurrence, A possède un plus petit élément.
  - sinon, alors $B = A \cup \{n\}$ contient n donc, par hypothèse de récurrence, possède un plus petit élément b :
    - si $b = n$, alors pour tout x dans A, $x \geqslant b$ et $x \neq n$ (car $n \notin A$) donc $x \geqslant n+1$, donc $n+1$ est le plus petit élément de A,
    - sinon, $b \neq n$ donc $b \in A$ et pour tout x dans A, $x \geqslant b$. Donc b est le plus petit élément de A.

  Dans tous les cas, A contient un plus petit élément, et la proposition est alors prouvée !

Héréditaire et vraie au rang 0, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.
Si maintenant A est une partie non vide quelconque de $\mathbb{N}$, alors elle contient un élément $a \in \mathbb{N}$. Comme $\mathcal{P}_a$ est vraie, A possède un plus petit élément.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que toute partie de $\mathbb{N}$ admette un plus petit élément, et démontrons le principe de récurrence. Soit $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de propositions telle que $\mathcal{P}_0$ est vraie et que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$.
Soit

$$A = \{n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n \text{ est fausse}\}$$

Alors A est une partie de $\mathbb{N}$. Supposons que A soit non vide. Alors elle admettrait un plus petit élément n_0.
Déjà, $n_0 > 0$ car $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Ensuite, comme n_0 est le plus petit élément de A, pour tout $n < n_0$, $n \notin A$ donc $\mathcal{P}_n$ est vraie. En particulier, $\mathcal{P}_{n_0-1}$ est vraie. Mais comme $\mathcal{P}_{n_0-1} \Rightarrow \mathcal{P}_{n_0}$, $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie !
Ceci est absurde, donc A est vide ! Donc pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Indications

1
1. Penser qu'il y a un $\forall$ au début.
2. Le $\forall$ est évident ici, c'est le $\exists$ qui est caché.
3. Piège, il y a deux propositions à formuler, la deuxième commence par « $\exists C$ »

3
1. Penser que la première proposition n'est pas très contraignante...
2. Penser à une fonction qui oscille **beaucoup**.

4 Penser à trois éléments importants : l'**appartenance** d'un **élément** à un **ensemble**, l'**inclusion** d'une **partie** dans un **ensemble**, et les **produits cartésiens**.

5 **Commencer par faire un dessin**, puis raisonner par double inclusion.

6
1. Prendre un élément de A et dire qu'il appartient à $A \cup X$. Faire ensuite une disjonction de cas.
2.
3. Faire des dessins pour avoir l'idée, et raisonner par analyse-synthèse.

7 Faire une analyse-synthèse.

9 Penser qu'un « $\exists, \dots \forall$ » est beaucoup plus restrictif qu'un « $\forall, \dots, \exists$ ».

10 Attention ! « décroissante » , « positive » , etc. **incluent** le cas d'égalité en français.

11 Attention à
- la négation d'un $\forall$ en $\exists$ et réciproquement,
- la négation d'une application.

12 Pour comparer les énoncés, les exprimer sans implication. Et montrer que $\mathcal{Q}$ implique $\mathcal{P}$, mais pas l'inverse (en général).

13
1. Penser que « être identiquement nulle » signifie « être nulle pour tous les réels » .
2. (a) La première question a été faite en cours.
   (b) Exprimer η **très simplement** en fonction de ε.
   (c) Nier proprement la propriété $\mathscr{UC}$.

14 Commencer par décrire en extension $\mathcal{P}(\{a\})$.

15 **ATTENTION !** La notion de « limite d'ensembles » n'existe pas.
1. Démontrer par double inclusion qu'il s'agit de $]a, b[$.
2. Démontrer par double inclusion qu'il s'agit de $]a, b[$.

17
1. Faire des dessins et démontrer que si on n'a pas $B \subset A$, il n'y a pas de solution.
2. Faire des dessins et trouver une condition nécessaire pour qu'il existe une solution.

18 Raisonner par l'absurde en supposant que $A = B \times C$ avec $B \subset \mathbb{R}$ ou $C \subset \mathbb{R}$.

19
1. C'est de la vérification de vocabulaire : ne pas confondre $\in$ et $\subset$.
2. Pensez au fait que toute proposition universelle est vraie sur $\emptyset$. Penser aussi au fait que $\emptyset$ est inclus dans n'importe quel ensemble.
3. (a)
   (b)
   (c) Faire une récurrence. Pour l'hérédité, prendre x dans X_{n+1}, et considérer les éléments de x : quelle propriété vérifient-ils ?
4. Disjoindre les cas, selon que $x \in Y$ ou $x \in \{Y\}$.
5. Disjoindre les cas.
6. Montrer par récurrence que chacun des A_k est transitif.

20
1. Faire le même raisonnement que $\sqrt{2}$ en cours.
2. Utiliser la décomposition en facteurs premiers, et des théorèmes d'arithmétique.

21 Faire un raisonnement par l'absurde ou par contraposée.

23 Regarder l'hérédité pour le passage de 1 à 2 stylos.

24 **Toujours** commencer par calculer les 2 ou 3 premiers termes de la suite, puis intuiter l'expression du terme général, puis faire une démonstration par récurrence.

27
1. C'est une question de première S, il suffit d'étudier le trinôme du second degré.
2. Faire une analyse-synthèse, prendre $n = 0$ puis $n = 1$.
3. S'intéresser à la négation de la proposition.

28 Faire une analyse-synthèse très proche de la question de cours.

29
1. Faire une récurrence sur n.
2. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $f(n+1) > f(n)$.
3. Remarquer que si f est une fonction croissante, alors pour tous x et y, $f(x) \geqslant f(y) \Rightarrow x > y$.
4.

31 Faire une récurrence **double** ou **forte**, en pensant

— ou bien à développer $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^n$,

— ou bien à calculer $\left(x^n + \dfrac{1}{x^n}\right) \times \left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.