nlaillet.math@gmail.com

# DM 01
## à rendre le lundi 11 septembre
## Durée conseillée : 2h

**Faites très attention à la rédaction, et n'oubliez pas de DÉCLARER VOS VARIABLES !**

**Exercice 1.** Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Démontrer proprement à chaque fois.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0 \tag{1}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0 \tag{2}$$
$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0 \tag{3}$$
$$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0 \tag{4}$$

**Exercice 2.** Soit $x$ un réel positif ou nul. Démontrer que $(\forall \varepsilon > 0, x \leqslant \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.
*On démontrera la contraposée.*

**Exercice 3.** *Décomposition de* $1$ *comme somme d'inverses d'entiers*. On s'intéresse à la proposition suivante, définie pour $n \in \mathbb{N}$.

$$\exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n,\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1 \textbf{ et } a_1 < a_2 < \cdots < a_n. \tag{$\mathcal{P}_n$}$$

1. Pourquoi le résultat est-il évident sans l'hypothèse « $a_1 < \cdots < a_n$ » ?
2. Étudier $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$.
3. Démontrer que pour tout $n \geqslant 3$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.
4. Démontrer que pour $n = 3$, il y a unicité d'une telle écriture. Y a-t-il unicité pour $n = 4$ ?