DM 02
à rendre le lundi 18 septembre

Mettez bien le temps passé sur le DM ainsi que l'aide reçue.

Formules Je propose trois formules pour ce DM

- formule « bases » : faire l'exercice 1 ainsi que le Problème, questions 1,2,4.
  Durée conseillée : 2h.
- formule « intermédiaire » : faire l'exercice 1, le Problème, questions 1,2,4 et partie B.
  Durée conseillée : 3h.
- formule « complète » : tout faire ! La question 3 du problème est délicate, de même que la partie C. N'hésitez pas à chercher à plusieurs.
  Durée conseillée : 4h.

Exercice 1.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe deux entiers a_n et b_n tels que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $a_n^2 - 2b_n^2$?
4. En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1+\sqrt{2})^n = \sqrt{m} + \sqrt{m-1}$.

Problème – Étude des nombres de Catalan

Le but de ce problème est d'étudier les nombres dits de Catalan. La **partie A** est dévolue à l'établissement de formules pour les nombres de Catalan, la **partie B** s'intéresse à la parité de ces nombres. La **partie C**, indépendante de la partie B, permet d'étudier, à la manière du triangle de Pascal, ce qu'on appelle le **triangle de Catalan**.
On remarquera que toutes les formules à démontrer sont données : si vous n'arrivez pas à les démontrer, vous pouvez les admettre pour les questions qui suivent.
Définition. La suite des *nombres de Catalan*, notée $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie comme suit : $C_0 1$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}. \tag{1}$$

PARTIE A. Premiers calculs

1. Calculer C_k pour k allant de 0 à 4.

On veut déterminer une formule beaucoup plus simple pour les nombres de Catalan. Notre but est de démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \tag{2}$$

On pose alors, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $D_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$D_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} D_n.$$

3. (*) On note dans cette question, pour tout entier naturel n,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} D_k D_{n-k} \text{ et } T_n = \sum_{k=0}^{n} k D_k D_{n-k}.$$

(a) Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $T_n = \frac{n}{2} S_n$.
On pourra effectuer dans T_n un changement d'indice $\ell = n - k$ et montrer que $T_n = nS_n - T_n$.

(b) On va démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $S_n = D_{n+1}$. On nomme, pour tout entier n, $\mathcal{P}_n : S_n = D_{n+1}$.

i. Démontrer l'initialisation.

On suppose alors que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain entier naturel n.

ii. Démontrer que

$$4T_n + 3S_n = T_{n+1} + S_{n+1}$$

iii. En déduire que $S_{n+1} = D_{n+2}$ et conclure la récurrence.

(c) Conclure que pour tout entier naturel n,

$$D_n = C_n.$$

4. Démontrer la formule alternative suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}. \tag{3}$$

On pourra, si on n'a pas réussi la question précédente, admettre la formule (2).

PARTIE B. Triangle de Catalan On définit, pour tous entiers naturels k et n,

$$B(n,k) = \frac{(n+k)!(n-k+1)}{k!(n+1)!}.$$

5. Si $n \in \mathbb{N}$, que vaut $B(n,0)$? $B(n,n+1)$?

6. Soit n un entier naturel. À l'aide des résultats prouvés en partie A, exprimer $B(n,n)$ à l'aide de nombres de Catalan.

7. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$B(n,n) = B(n,n-1).$$

8. Démontrer que : $\forall (k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*,\ B(n,k) = \binom{n+k}{k} - \binom{n+k}{k-1}$.

9. (a) Démontrer que pour tous k et n dans $\mathbb{N}^*$,

$$B(n,k) = B(n-1,k) + B(n,k-1).$$

(b) En déduire que pour tout k dans $\mathbb{N}$ et n dans $\mathbb{N}^*$,

$$B(n+1,k) = \sum_{i=0}^{k} B(n,i).$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

10. Représenter, à l'aide de la relation précédente, un **triangle de Catalan**, i.e. la valeur des $B(n,k)$ pour n entre 0 et 4 et k entre 0 et n.

PARTIE C. Parité des nombres de Catalan

11. En utilisant la définition des nombres de Catalan, démontrer que pour tout entier naturel n non nul, si n est pair, alors

$$C_n = 2\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} C_k C_{n-1-k}.$$

On admettra que si n est impair, alors $C_n = 2\sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} C_k C_{n-1-k} + C_{\frac{n-1}{2}}^2$.

12. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel m, C_{2^m-1} est impair.