MPSI1 – Programme de colles
Semaine 02 – du 25 au 29 septembre 2023

Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie

Cette section « boîte à outils » complète l'enseignement du lycée sur un certain nombre de points importants pour la suite :

- *calculs de sommes et de produits, dont la formule du binôme ;*
- *résolution de petits systèmes linéaires par l'algorithme du pivot ;*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Sommes et produits	
Somme et produit d'une famille finie de nombres réels.	Notations $\sum_{i\in I} a_i$, $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\prod_{i\in I} a_i$, $\prod_{i=1}^{n} a_i$. Cas où I est vide.
Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupement de termes.	Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension.
Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} x^k$.	
Factorisation de $a^n - b^n$ par $a-b$.	
Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.	Exemples de sommes triangulaires.
Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux.	Convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k<0$ et $k>n$.
Formule du binôme dans $\mathbb{R}$.	
b) Résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot	
Système linéaire à coefficients réels de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues.	Interprétation géométrique : intersection de droites dans $\mathbb{R}^2$, de plans dans $\mathbb{R}^3$.
Algorithme du pivot et mise en évidence des opérations élémentaires.	Notations $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ $(\lambda \neq 0)$, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
c) Inégalités	
Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Compatibilité avec les opérations. Intervalles de $\mathbb{R}$.	Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients. Utilisation de factorisations et de tableaux de signes. Résolution d'inéquations.
Valeur absolue. Inégalité triangulaire.	Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $\lvert x-a\rvert \leqslant b$.
Dans $\mathbb{R}$, parties majorées, minorées, bornées. Majorant, minorant ; maximum, minimum.	
Partie entière d'un nombre réel.	Notation $\lfloor x \rfloor$.
d) Trigonométrie	
Cercle trigonométrique. Paramétrisation par cosinus et sinus.	
Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$.	Notation $a \equiv b\ [2\pi]$.
Cosinus et sinus de $\pi \pm x$, de $\frac{\pi}{2} \pm x$. Cosinus et sinus des angles usuels.	Les étudiants doivent savoir retrouver ces résultats et résoudre des équations et inéquations trigonométriques simples en s'aidant du cercle trigonométrique.
Formules d'addition $\cos(a\pm b)$, $\sin(a\pm b)$. Cas particulier des formules de duplication : $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.	On présente une justification géométrique de l'une de ces formules. Les étudiants doivent savoir retrouver rapidement les formules donnant $\cos(a)\cos(b)$, $\cos(a)\sin(b)$, $\sin(a)\sin(b)$.
Fonctions circulaires cosinus et sinus.	On justifie les formules donnant les fonctions dérivées de sinus et cosinus vues en classe de terminale.
Pour $x\in\mathbb{R}$, inégalité $\lvert\sin(x)\rvert \leqslant \lvert x\rvert$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Fonction tangente.	Notation $\tan$. Dérivée, variations, représentation graphique.
Tangente de $\pi \pm x$. Tangente des angles usuels.	Interprétation sur le cercle trigonométrique.
Formule d'addition $\tan(a \pm b)$.	Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ en fonction de $\tan(t/2)$.

Nombres complexes

L'objectif de cette section, que l'on illustrera par de nombreuses figures, est de donner une solide pratique des nombres complexes, à travers les aspects suivants :

- *l'étude algébrique du corps $\mathbb{C}$ et la notion d'équation algébrique ;*
- *l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane ;*
- *l'exponentielle complexe et ses applications à la trigonométrie.*

Contenus	Capacités & commentaires
a) Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes. Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.	La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).
b) Conjugaison et module	
Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Module. Relation $\lvert z\rvert^2 = z\overline{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	Image du conjugué dans le plan complexe. Interprétation géométrique de $\lvert z - z'\rvert$, cercles et disques.
c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	
Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ pour $t \in \mathbb{R}$.	Notation $\mathbb{U}$.
Exponentielle d'une somme.	
Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}$.	Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q), \sin(p) \pm \sin(q)$. Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
Formule de Moivre.	Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.
d) Forme trigonométrique	
Forme trigonométrique $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(r > 0)$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient. Transformation de $a \cos t + b \sin t$ en $A \cos(t - \varphi)$.	
g) Exponentielle complexe	
Définition de e^z pour z complexe : $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)}$.	Notations $\exp(z)$, e^z. Module et arguments de e^z.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Exponentielle d'une somme. Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$. Résolution de l'équation $\exp(z) = a$.	

Programme de cette colle : du calcul, du calcul, du calcul ! Poser essentiellement des exercices mettant en jeu :

— des calculs de sommes ou de produits simples ou doubles

— résolutions de petits systèmes linéaires.

— inégalités dans $\mathbb{R}$

— trigonométrie

— complexes : le début uniquement (partie réelle, imaginaire, conjugué, module, complexes de module 1, argument, exponentielle complexe) ! Pas d'équations polynomiales, pas de racines de l'unité, pas de géométrie !

Exemples de questions de cours

1. Soit n un entier naturel. Donner les valeurs de $\sum\limits_{k=0}^{n} k$, de $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2$, $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3$ et démontrer l'un des 3 résultats énoncés (selon l'envie de la colleuse ou du colleur).
2. Coefficient binomial : définition et formules $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ainsi que $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$.
3. Calcul de $\sum_{k=0}^{n} kx^k$ par une méthode au choix.
4. Factorisation de $a^n - b^n$ (énoncé et démonstration) et de $a^n + b^n$ quand n est impair.
5. Énoncé et démonstration de la formule du binôme de Newton.
6. Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, de $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$, de $\sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k \text{ pair.}}} \binom{n}{k}$.
7. Dérivabilité de $\sin$ en 0, ou en tout réel. Dérivabilité de $\cos$. (inégalité $|\sin(x) \leq |x| \leq |\tan(x)|$ à prouver aussi)
8. Formules de trigonométrie
9. Questions autour de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de l'inégalité triangulaire (au choix, certains de ces énoncés) :
   - — $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$ avec égalité ssi z est réel positif,
   - — (Cauchy-Schwarz) $\mathrm{Re}(z\bar{z'}) \leq |z||z'|$ avec égalité ssi z et z' sont positivement colinéaires,
   - — (Inégalité triangulaire) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ avec égalité ssi z et z' sont positivement colinéaires,
   - — (Inégalité triangulaire renversée) $||z| - |z'|| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$.
10. Formules d'Euler, de Moivre, module et argument de $1 + \mathrm{e}^{i\theta}$.
11. Factorisation de $\mathrm{e}^{ip} \pm \mathrm{e}^{iq}$, conséquences.
12. Linéarisation d'une petite puissance de $\sin$ ou de $\cos$.
13. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$ où $\theta \in \mathbb{R}$.
14. Exponentielle complexe : définition, expression de $|\mathrm{e}^z|$, et $\forall a \in \mathbb{C}^*,\ \exists z \in \mathbb{C},\ a = \mathrm{e}^z$.