MPSI1 – Programme de colles

Semaine 03 – du 2 au 6 octobre 2023

Nombres complexes

L'objectif de cette section, que l'on illustrera par de nombreuses figures, est de donner une solide pratique des nombres complexes, à travers les aspects suivants :

- l'étude algébrique du corps $\mathbb{C}$ et la notion d'équation algébrique ;
- l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane ;
- l'exponentielle complexe et ses applications à la trigonométrie.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Nombres complexes

<p>Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes. Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^n x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme. Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.</p>	<p>La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme. On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).</p>
--	---

b) Conjugaison et module

<p>Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Module. Relation $z ^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.</p>	<p>Image du conjugué dans le plan complexe. Interprétation géométrique de $z - z'$, cercles et disques.</p>
---	--

c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

<p>Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$. Exponentielle d'une somme. Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm e^{it}$, de $e^{ip} \pm e^{iq}$. Formule de Moivre.</p>	<p>Notation $\cup$. Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$. Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$. Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.</p>
---	---

d) Forme trigonométrique

Forme trigonométrique $re^{i\theta}$ ($r > 0$) d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient.
Transformation de $a \cos t + b \sin t$ en $A \cos(t - \varphi)$.

e) Équations algébriques

<p>Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$. Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$. Somme et produit des racines.</p>	<p>Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.</p>
--	---

f) Racines n -ièmes

Description des racines n -ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.

Notation $\mathbb{U}_n$.
Représentation géométrique.

g) Exponentielle complexe

Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i \operatorname{Im}(z)}$.
Exponentielle d'une somme.
Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.
Résolution de l'équation $\exp(z) = a$.

Notations $\exp(z)$, e^z . Module et arguments de e^z .

h) Interprétation géométrique des nombres complexes

Interprétation géométrique des module et arguments de $\frac{c-a}{b-a}$.
Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az + b$ pour $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.
Interprétation géométrique de la conjugaison.

Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.

Similitudes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations.

L'étude générale des similitudes est hors programme.

Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral**A - Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes****a) Généralités sur les fonctions**

Ensemble de définition.
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.
Parité, imparité, périodicité.
Somme, produit, composée.
Monotonie (large et stricte).
Fonctions majorées, minorées, bornées.

Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$.
Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.

Traduction géométrique de ces propriétés.
La fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

b) Dérivation

Dérivée d'une fonction.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.
Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.
Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe.
Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque.
Fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Notations $f'(x)$, $\frac{d}{dx}(f(x))$.

Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente ; ils ne sont pas démontrés à ce stade.

Exemples simples de calculs de dérivées partielles.
Résultats admis à ce stade.

Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités.

La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique.

Dérivées d'ordre supérieur.

c) Fonctions usuelles

Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.

Dérivée, variations, représentation graphique.

Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

Logarithme décimal, logarithme en base 2.

Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.

Inégalités $\exp(x) \geq 1 + x$, $\ln(1 + x) \leq x$.

Programme de cette colle :

1. cours sur les complexes et le début des fonctions usuelles (juste les questions de cours).
2. exercices sur les complexes ou le début des fonctions usuelles (généralités, graphes, exponentielles, logarithmes)

La semaine suivante sera entièrement consacrée aux fonctions usuelles.

Exemples de questions de cours

1. Calculer $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$ où $\theta \in \mathbb{R}$.
 2. Exponentielle complexe : définition, expression de $|e^z|$, et $\forall a \in \mathbb{C}^*$, $\exists z \in \mathbb{C}$, $a = e^z$.
 3. Description de $\mathbb{U}_n$.
 4. Résolution de l'équation $z^n = a$.
 5. Somme et produit des racines de l'unité.
 6. Description des transformations du type $z \mapsto az + b$.
 7. Décomposition d'une fonction comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
 8. Définition, dérivation des fonctions puissances/des fonctions exponentielles de base a .
 9. Tracé de graphes (translatés, dilatés, symétriques).
 10. Croissances comparées.
-