# DM 03
# à rendre le lundi 2 octobre

*Mettez bien la formule choisie, le temps passé sur le DM ainsi que l'aide reçue.*

**Formules** Je propose trois formules pour ce DM

- formule « bases » : faire les parties A et B du problème 1.
  *Durée conseillée : 2h.*
- formule « intermédiaire » : faire tout le problème 1.
  *Durée conseillée : 3h.*
- formule « complète » : tout faire !
  *Durée conseillée : 4h. (c'est un vieux sujet de DS, donc prévu pour 4h)*

## Problème 1. Autour des homographies

Soient $(a, b, c, d)$ quatre complexes tels que $ad - bc \neq 0$. On s'intéresse à l'application $h$, définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ tel que } cz + d \neq 0,\ h(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

La condition $ad - bc \neq 0$ implique que, dans l'expression de $h$, numérateur et dénominateur ne sont pas proportionnels, ce qui fait que $h$ n'est pas l'application constante.
Le but de ce problème est d'étudier l'effet de certaines homographies sur différentes zones de $\mathbb{C}$ : le cercle unité et le demi-plan $\{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Les parties B et C sont indépendantes.

### A. Trois questions préliminaires

Les quatre complexes $(a, b, c, d)$ et l'application $h$ sont les mêmes qu'au début du sujet.

**1.** Démontrer que $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $a - cz \neq 0$, $\exists! w \in \mathbb{C}$ tel que $cw + d \neq 0$ et $h(w) = z$. *On résoudra explicitement une équation, et donnera l'expression de $w$ en fonction de $z$.*

**Correction**

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $a - cz \neq 0$. Soit $w \in \mathbb{C}$ tel que $c + dz \neq 0$. Alors on a les équivalences

$$\begin{aligned} h(w) = z &\Leftrightarrow \frac{aw+b}{cw+d} = z \\ &\Leftrightarrow aw + b = z(cw+d) \\ &\Leftrightarrow (a - zc)w = zd - b \\ &\Leftrightarrow \boxed{w = \frac{zd-b}{a-zc}}, \text{ l'opération étant légitime car } a - zc \neq 0. \end{aligned}$$

De plus, $\boxed{w \neq -\frac{d}{c}}$ : si c'était le cas, alors on aurait $c\dfrac{zd-b}{a-zc} = -d$, c'est-à-dire que $c(zd - b) = czd - ad$, ou encore $ad - bc = 0$, ce qui est exclus !

**2.** COURS Démontrer que pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\mathfrak{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2$.

**Correction**

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Alors

$$|z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} = |z|^2 + z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}} + |z'|^2 = \boxed{|z|^2 + 2\mathfrak{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2.}$$

**3.** Soient $u$ et $v$ deux nombres complexes tels que : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ u + 2\mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{i\theta}v) = 0$. Démontrer que $u = v = 0$.

**Correction**

$v \in \mathbb{C}$ donc on dispose de $\delta$ (**éventuellement nul**) et de $\varphi$ tels que $v = \delta \mathrm{e}^{i\varphi}$. La proposition précédente signifie que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ u + 2\mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{i\theta}\delta\mathrm{e}^{i\varphi}) = 0$.

**Prenons** $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$**.** Alors

$$u + 2\mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{i\theta}\delta\mathrm{e}^{i\varphi}) = u + 2\mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{-i\varphi}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\delta\mathrm{e}^{i\varphi}) = u + 2\mathfrak{Re}(i\delta) = u.$$

Ainsi, $\boxed{u = 0}$.
**Prenons désormais** $\theta = -\varphi$**.** Alors

$$u + 2\mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{i\theta}\delta\mathrm{e}^{i\varphi}) = 0 + 2\mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{-i\varphi}\delta\mathrm{e}^{i\varphi}) = 2\mathfrak{Re}(\delta) = 2\delta,$$

donc $\delta$ est nul, donc $\boxed{v = 0}$.

## B. Homographies préservant le cercle unité

### B-I. Deux exemples

**4.** Dans cette question, on considère un réel $\theta$ et $f : z \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}}{z}$. Démontrer que $f$ est définie sur $\mathbb{U}$ et que : $\forall z \in \mathbb{U},\ f(z) \in \mathbb{U}$.

**Correction**

Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors $z \neq 0$ donc $f(z)$ est défini et

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{z}\right| = \frac{|\mathrm{e}^{i\theta}|}{|z|} = 1,$$

donc $\boxed{f(z) \in \mathbb{U}}$.

**5.** Dans cette question, on considère $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha \notin \mathbb{U}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $g : z \mapsto \mathrm{e}^{i\theta}\dfrac{z+\alpha}{\overline{\alpha}z+1}$. Vérifier que l'on a ainsi une homographie (on précisera $(a, b, c, d)$ et on vérifiera que $ad - bc \neq 0$), définie sur $\mathbb{U}$, et que : $\forall z \in \mathbb{U},\ g(z) \in \mathbb{U}$.

**Correction**

$g$ est bien de la forme $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ avec $a = e^{i\theta}$, $b = e^{i\theta}\alpha$, $c = e^{i\theta}\overline{\alpha}$ et $d = e^{i\theta}$. Ainsi,

$$ad - bc = e^{i\theta}(1 - |\alpha|^2) \neq 0,$$

car $\alpha \notin \mathbb{U}$. De plus, si $z \in \mathbb{U}$, $\overline{\alpha}z \neq -1$ car $|z| = 1$ et $|\overline{\alpha}| \neq 1$. Donc $g$ est définie sur $\mathbb{U}$. Enfin, si $z \in \mathbb{U}$,

$$\begin{aligned}
\left| e^{i\theta} \frac{z+\alpha}{\overline{\alpha}z+1} \right| &= \left| \frac{z+\alpha}{\overline{\alpha}z+1} \right| \\
&= \frac{|z+\alpha|}{|\overline{\alpha}z+1|} \\
&= \frac{|z+\alpha|}{|z|.\left|\overline{\alpha}+\frac{1}{z}\right|} \\
&= \frac{|z+\alpha|}{|\overline{\alpha}+\overline{z}|} \text{ car } |z| = 1, \text{ donc } \overline{z} = \frac{1}{z}. \\
&= \frac{|z+\alpha|}{|\alpha+z|} = 1 \text{ car un complexe et son conjugué ont même module}
\end{aligned}$$

### B-II. Forme générique des homographies préservant $\mathbb{U}$

*Dans cette partie, on aura intérêt à utiliser certains des résultats préliminaires.*

On considère ici une homographie $h : z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ tels que $ad - bc \neq 0$, et on suppose de plus que $h$ préserve l'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 :

$$\forall z \in \mathbb{U}, \;\; h(z) \in \mathbb{U}.$$

**6.** Démontrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}, |a|^2 + |b|^2 + 2\mathfrak{Re}\left(a\overline{b}e^{i\theta}\right) = |c|^2 + |d|^2 + 2\mathfrak{Re}\left(c\overline{d}e^{i\theta}\right)$

**Correction**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$. Mais comme $h$ préserve $\mathbb{U}$, $|h(e^{i\theta})| = 1$, donc

$$\left| \frac{ae^{i\theta}+b}{ce^{i\theta}+d} \right| = 1, \text{ c'est-à-dire que } |ae^{i\theta}+b| = |ce^{i\theta}+d|.$$

Donc

$$|ae^{i\theta}+b|^2 = |ce^{i\theta}+d|^2,$$

soit, par la formule rappelée dans les préliminaires,

$$\boxed{|a|^2 + 2\mathfrak{Re}(ae^{i\theta}\overline{b}) + |b|^2 = |c|^2 + 2\mathfrak{Re}(ce^{i\theta}\overline{d}) + |d|^2},$$

ce qui est le résultat recherché.

**7.** En déduire que $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et $a\overline{b} = c\overline{d}$.

**Correction**

Ainsi, pour tout $\theta$ dans $\mathbb{R}$,

$$|a|^2+|b|^2-|c|^2-|d|^2+2\mathfrak{Re}((a\overline{b}-c\overline{d})e^{i\theta})=0,$$

soit, par la question 3.,

$$\boxed{|a|^2+|b|^2-|c|^2-|d|^2=0 \text{ et } a\overline{b}-c\overline{d}=0}$$

**8.** Si $a=0$, montrer que l'homographie $h$ est de la forme de l'homographie de la question 4.

**Correction**

Si $a=0$, alors $c\overline{d}=0$. Si $c$ était nul, on aurait $ad-bc=0$, donc $c\neq 0$, donc $d=0$. Ainsi, $|b|=|c|$, donc on dispose de $\theta$ tel que $b=e^{i\theta}c$. Ainsi, pour tout $z$ dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$,

$$\boxed{h(z)=\frac{e^{i\theta}c}{zc}=\frac{e^{i\theta}}{z}}$$

ce qui est le résultat cherché !

**9.** Si $a\neq 0$, démontrer que $\left(|a|^2-|c|^2\right)\left(|a|^2-|d|^2\right)=0$. Conclure que $|a|=|d|$, puis que $h$ est de la forme de l'homographie de la question 5.

**Correction**

Si $a\neq 0$, alors

$$\begin{aligned}\left(|a|^2-|c|^2\right)\left(|a|^2-|d|^2\right)&=|a|^4-|a|^2(|c|^2+|d|^2)+|c|^2|d|^2\\&=|a|^4-|a|^2(|a|^2+|b|^2)+|c|^2|d|^2\\&=|c|^2|d|^2-|a|^2|b|^2=0,\end{aligned}$$

car $|a\overline{b}|=|c\overline{d}|$. Ainsi, $|a|=|c|$ ou $|a|=|d|$. Mais si on avait $|a|=|c|$, on aurait, comme $\overline{b}=\dfrac{c\overline{d}}{a}$,

$$ad-bc=ad-\frac{\overline{c}dc}{\overline{a}}=\frac{ad\overline{a}-\overline{c}dc}{\overline{a}}=\frac{|a|^2d-d|c|^2}{\overline{a}}=0,$$

absurde !

Donc $|a|=|d|$, donc on dispose de $\theta\in\mathbb{C}$ tel que $a=de^{i\theta}$. Mais alors,

$$h(z)=\frac{de^{i\theta}z+b}{cz+d}=e^{i\theta}\frac{z+\frac{be^{-i\theta}}{d}}{\frac{c}{d}z+1}.$$

On pose $\alpha=\dfrac{b}{d}e^{-i\theta}$. Alors, comme $a\overline{b}-c\overline{d}=0$, $de^{i\theta}\overline{b}=c\overline{d}$, soit $\dfrac{c}{d}=\dfrac{e^{i\theta}\overline{b}}{\overline{d}}=\overline{\alpha}$, d'où $h$ est de la forme 5. !

## C. Homographies préservant le demi-plan de Poincaré

Dans toute la suite du problème, $\mathbb{H}$ désignera le demi-plan de Poincaré : $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathfrak{Im}(z) > 0\}$.

Soient $(a, b, c, d)$ quatre complexes tels que $ad - bc \neq 0$, et $h$, toujours définie par

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ tel que } cz + d \neq 0,\ f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

### C-I. Une condition pour préserver les demi-plans

On suppose ici que $h$ préserve les demi-plans, c'est-à-dire que

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ tel que } cz + d \neq 0, \begin{cases} \mathfrak{Im}(z) > 0 \Rightarrow \mathfrak{Im}(h(z)) > 0 \\ \mathfrak{Im}(z) < 0 \Rightarrow \mathfrak{Im}(h(z)) < 0 \\ \mathfrak{Im}(z) = 0 \Rightarrow \mathfrak{Im}(h(z)) = 0 \end{cases}$$

On suppose que $h$ est définie en 0, 1 et $-1$.

**10.** Démontrer qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma)$ trois réels deux à deux distincts tels que

$$\begin{cases} b - \alpha d = 0 \\ a + b - \beta c - \beta d = 0 \\ -a + b + \gamma c - \gamma d = 0 \end{cases}$$

**Correction**

On sait que $h(0) \in \mathbb{R}$ donc on dispose de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $h(0) = \alpha$, c'est-à-dire $\dfrac{b}{d} = \alpha$, ou encore $b = \alpha d$.
De même, $h(1) = \beta$ et $h(-1) = \gamma$, avec $\beta$ et $\gamma$ deux réels. Ainsi, $a + b = \beta(c + d)$ et $-a + b = \gamma(-c + d)$, d'où les 3 équations !
Les réels $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont deux à deux distincts par la question 1., qui assure l'unicité d'un antécédent pour une image donnée !

**11.** En déduire que $a$, $b$ et $c$ sont tous trois des multiples réels de $d$, i.e. qu'il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tels que $a = \lambda d$, $b = \mu d$, $c = \nu d$.

**Correction**

Par la première ligne, on en déduit que $b = \alpha d$. En faisant $L_2 + L_3$, on en déduit que $(\gamma - \beta)c = -2b + \beta d + \gamma d$, doit, comme $\gamma \neq \beta$, $c = \nu d$, avec $\nu$ un réel.
Enfin, $a = -b + \beta c + \beta d = \lambda d$, avec $\lambda$ un réel !

Ainsi, pour tout complexe $z$, $h(z) = \dfrac{\lambda z + \mu}{\nu z + 1}$ ; autrement dit, on peut supposer $(a, b, c, d)$ réels. La démonstration fonctionnerait aussi si $h$ n'était pas définie en 0, 1 ou $-1$.

On suppose désormais, jusqu'à la fin du problème, que $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

**12.** Soit $z \in \mathbb{H}$. Vérifier que $h(z)$ est bien défini et exprimer $\mathfrak{Im}(h(z))$ en fonction de $\mathfrak{Im}(z)$, de $ad - bc$ et de $|cz + d|$.

**Correction**

Comme $\mathfrak{Im}(z) > 0$, si $cz + d = 0$, alors $\mathfrak{Im}(cz + d) = 0$, donc $\boxed{\mathfrak{Im}(cz) = 0, \text{ donc } c = 0. \text{ Donc } d = 0,}$ absurde, ceci contredit $ad - bc \neq 0$ !
De plus,

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{az+b}{cz+d} \\ &= \frac{(az+b)(c\overline{z}+d)}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{ac|z|^2 + daz + bc\overline{z} + bd}{|cz+d|^2}. \end{aligned}$$

ainsi,

$$\begin{aligned} \mathfrak{Im}(h(z)) &= \mathfrak{Im}\left(\frac{ac|z|^2 + daz + bc\overline{z} + bd}{|cz+d|^2}\right) \\ &= \frac{\mathfrak{Im}(daz + bc\overline{z})}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{da\mathfrak{Im}(z) + bc\mathfrak{Im}(\overline{z})}{|cz+d|^2} \\ &= \boxed{\frac{(ad-bc)\mathfrak{Im}(z)}{|cz+d|^2}.} \end{aligned}$$

**13.** En déduire que $h$ préserve les demi-plans si et seulement si $ad - bc > 0$.

**Correction**

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $h$ préserve les demi-plans, $\mathfrak{Im}(h(i)) > 0$ donc $\dfrac{ad - bc}{|ci + d|^2} > 0$, donc $ad - bc > 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $ad - bc > 0$, comme $\mathfrak{Im}(h(z)) = \dfrac{(ad - bc)\mathfrak{Im}(z)}{|cz + d|^2}$, $\mathfrak{Im}(h(z))$ est nul ssi $\mathfrak{Im}(z) = 0$, et, sinon, est de même signe strict que $z$. Donc $h$ préserve les demi-plans !

D'où l'équivalence demandée.

## D. Homographies et distance hyperbolique

### D-I. Définition de la distance hyperbolique

Si $u$ et $v$ sont dans $\mathbb{H}$, et $u \neq v$, on appelle **distance hyperbolique** de $u$ et $v$, notée $\delta(u, v)$ la quantité définie par

$$\delta(u, v) = \ln\left(\frac{|u - \overline{v}| + |u - v|}{|u - \overline{v}| - |u - v|}\right).$$

**14.** Soient $z$ et $w$ dans $\mathbb{H}$. Démontrer que le réel $|z-\overline{w}|^2 - |z-w|^2$ est strictement positif. En déduire que $\delta(z, w)$ est définie et positive, et qu'elle est nulle si, et seulement si $z = w$.

**Correction**

Il faut en fait déjà montrer que l'on a bien un réel ! On calcule

$$\begin{aligned}|z-\overline{w}|^2 - |z-w|^2 &= |z|^2 - 2\mathfrak{Re}(zw) + |w|^2 - |z|^2 + 2\mathfrak{Re}(z\overline{w}) - |w|^2 \\ &= 2\mathfrak{Re}(z(\overline{w}-w)) \\ &= 2\mathfrak{Re}(z.2i\mathfrak{Im}(w)) \\ &= 4\mathfrak{Im}(w)\mathfrak{Re}(iz) \\ &= \boxed{4\mathfrak{Im}(w)\mathfrak{Im}(z) > 0}\end{aligned}$$

D'où la stricte positivité. On utilisera plusieurs fois la formule

$$|z-\overline{w}|^2 - |z-w|^2 = 4\mathfrak{Im}(w)\mathfrak{Im}(z) \tag{1}$$

Ainsi,

$$\frac{|z-\overline{w}| + |z-w|}{|z-\overline{w}| - |z-w|} = \frac{(|z-\overline{w}| + |z-w|)^2}{(|z-\overline{w}| - |z-w|)(|z-\overline{w}| + |z-w|)} = \frac{(|z-\overline{w}| + |z-w|)^2}{4\mathfrak{Im}(w)\mathfrak{Im}(z)} > 0,$$

car si $|z-\overline{w}| + |z-w| = 0$, alors $z = \overline{w}$ et $z = w$, i.e. $z \in \mathbb{R}$, impossible car $z \in \mathbb{H}$ !

Ainsi, $\dfrac{|z-\overline{w}| + |z-w|}{|z-\overline{w}| - |z-w|} > 0$ et on peut donc définir $\delta(z, w)$.

Ensuite, $\delta(z, w) \geqslant 0$ : en effet, $|z-\overline{w}| + |z-w| \geqslant |z-\overline{w}| - |z-w|$ et, par positivité de $|z-\overline{w}| - |z-w|$,

$$\frac{|z-\overline{w}| + |z-w|}{|z-\overline{w}| - |z-w|} \geqslant 1, \text{ donc } \boxed{\delta(z, w) \geqslant 0}.$$

Enfin, $\delta(z, w) = 0$ si, et seulement si $|z-\overline{w}|+|z-w| = |z-\overline{w}|-|z-w|$, i.e. $|z-w| = 0$, soit $\boxed{z = w.}$

## D-II. Fonctions hyperboliques et distance hyperbolique

On note, pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$, $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$, $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

**15.** Démontrer que pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$ et que $\mathrm{ch}(x) = 1 + 2\mathrm{sh}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$.

**Correction**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = (\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x))(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)) = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^x = 1.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 + \left(e^{-\frac{x}{2}}\right)^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 - 2\right)\\ &= 2\left(\mathrm{sh}\frac{x}{2}\right)^2 + 1\end{aligned}$$

**16.** Montrer que pour tous $z$ et $w$ dans $\mathbb{H}$,

$$\mathrm{ch}(\delta(z,w)) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2\mathfrak{Im}(z)\mathfrak{Im}(w)}$$

**Correction**

Soient $z$ et $w$ dans $\mathbb{H}$. Alors, comme $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$ pour tout $x$ réel,

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(\delta(z,w)) &= \frac{1}{2}\left(\frac{|z-\overline{w}|+|z-w|}{|z-\overline{w}|-|z-w|} + \frac{|z-\overline{w}|-|z-w|}{|z-\overline{w}|+|z-w|}\right)\\ &= \frac{(|z-\overline{w}|+|z-w|)^2 + (|z-\overline{w}|-|z-w|)^2}{2\left(|z-\overline{w}|^2 - |z-w|^2\right)}\\ &= \frac{|z-\overline{w}|^2 + |z-w|^2}{4\mathfrak{Im}w\mathfrak{Im}z}\\ &= \frac{|z|^2+|w|^2-\mathfrak{Re}(zw)-\mathfrak{Re}(z\overline{w})}{2\mathfrak{Im}w\mathfrak{Im}z}\\ &= \frac{|z|^2+|w|^2-2\mathfrak{Re}z\mathfrak{Re}w}{2\mathfrak{Im}w\mathfrak{Im}z}\\ &= \frac{2\mathfrak{Im}w\mathfrak{Im}z+|z|^2+|w|^2-2\mathfrak{Re}z\mathfrak{Re}w-2\mathfrak{Im}w\mathfrak{Im}z}{2\mathfrak{Im}w\mathfrak{Im}z}\\ &= 1+\frac{|z|^2+|w|^2-2\mathfrak{Re}(z\overline{w})}{2\mathfrak{Im}w\mathfrak{Im}z}\end{aligned}$$

Ce qui donne la formule demandée.

$$\mathrm{ch}(\delta(z,w)) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2\mathfrak{Im}w\mathfrak{Im}z}$$

**17.** Montrer les formules suivantes pour tous $z$ et $w$ dans $\mathbb{H}$ :

$$\mathrm{sh}\left(\frac{\delta(z,w)}{2}\right) = \frac{|z-w|}{2\sqrt{\mathfrak{Im}(z)\mathfrak{Im}(w)}} \quad \mathrm{ch}\left(\frac{\delta(z,w)}{2}\right) = \frac{|z-\overline{w}|}{2\sqrt{\mathfrak{Im}(z)\mathfrak{Im}(w)}}$$

En déduire
$$\operatorname{th}\left(\frac{\delta(z,w)}{2}\right)=\frac{|z-w|}{|z-\overline{w}|}$$

**Correction**

Par la formule de la question 15. et par (1),
$$\left(\operatorname{sh}\frac{\delta(z,w)}{2}\right)^2=\frac{|z-w|^2}{4\mathfrak{Im}w\mathfrak{Im}z}$$
Comme on a vu que $\delta(z,w)>0$, $\operatorname{sh}(\delta(z,w))>0$, d'où
$$\boxed{\operatorname{sh}\frac{\delta(z,w)}{2}=\frac{|z-w|}{\sqrt{\mathfrak{Im}w\mathfrak{Im}z}}}$$
Par la formule (1)
$$|z-\overline{w}|^2-|z-w|^2=4\mathfrak{Im}w\mathfrak{Im}z,\ \text{d'où}\ \frac{|z-\overline{w}|^2}{4\mathfrak{Im}w\mathfrak{Im}z}-\left(\operatorname{sh}\frac{\delta(z,w)}{2}\right)^2=1.$$
On en déduit
$$\left(\operatorname{ch}\frac{\delta(z,w)}{2}\right)^2=1+\left(\operatorname{sh}\frac{\delta(z,w)}{2}\right)^2=\frac{|z-\overline{w}|^2}{4\mathfrak{Im}w\mathfrak{Im}z},\ \text{soit}\ \boxed{\operatorname{ch}\frac{\delta(z,w)}{2}=\frac{|z-\overline{w}|}{\sqrt{\mathfrak{Im}w\mathfrak{Im}z}}}$$
La formule pour th s'en déduit immédiatement !

**18.** Démontrer que th est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$.

**Correction**

C'est du cours ! La fonction th est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de limites égales à $-1$ en $-\infty$ et 1 en $+\infty$, donc, d'après le théorème de la bijection, $\boxed{\text{th est une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } ]-1,1[.}$

### D-III. Les homographies sont des isométries hyperboliques

On va finir ce problème en démontrant que les homographies sont des isométries hyperboliques, c'est-à-dire que si $h$ est une homographie préservant $\mathbb{H}$, alors pour tous $u$ et $v$, $\delta(h(u),h(v))=\delta(u,v)$.

**19.** Soit $z$ dans $\mathcal{H}$. Exprimer $\mathfrak{Im}h(z)$ en fonction de $ad-bc, \mathfrak{Im}z, |cz+d|$.

**Correction**

Oups, c'est déjà fait ! (question à 0 point...)

$$\boxed{\mathfrak{Im}(h(z)) = \frac{(ad-bc)\mathfrak{Im}(z)}{|cz+d|^2}.}$$

**20.** Soient $u$ et $v$ dans $\mathbb{H}$. Exprimer $h(u)-h(v)$ en fonction de $ad-bc$, $u-v$, $cu+d$, $cv+d$.

**Correction**

Calculons :

$$h(u)-h(v) = \frac{au+b}{cu+d} - \frac{av+b}{cv+d} = \frac{bcv+adu-bcu-adv}{(cu+d)(cv+d)} = \frac{(ad-bc)(u-v)}{(cu+d)(cv+d)}$$

**21.** Soient $u$ et $v$ dans $\mathbb{H}$. Démontrer que $\delta(h(u),h(v)) = \delta(u,v)$.

**Correction**

Comme la fonction th est bijective, on a un seul antécédent par image. Donc si on montre que $\text{th}\left(\frac{\delta(h(u),h(v))}{2}\right) = \text{th}\left(\frac{\delta(u,v)}{2}\right)$, alors on aura $\delta(h(u),h(v)) = \delta(u,v)$. Calculons

$$\begin{aligned}
\text{th}\left(\frac{\delta(h(u),h(v))}{2}\right) &= \left|\frac{h(u)-h(v)}{h(u)-h(\overline{v})}\right| \\
&= \left|\frac{(ad-bc)(u-v)(cu+d)(c\overline{v}+d)}{(cu+d)(cv+d)(ad-bc)(u-\overline{v})}\right| \\
&= \left|\frac{(u-v)(c\overline{v}+d)}{(cv+d)(u-\overline{v})}\right| = \left|\frac{(u-v)}{(u-\overline{v})}\right| \\
&= \text{th}\left(\frac{\delta(u,v)}{2}\right),
\end{aligned}$$

car $c\overline{v}+d$ et $cv+d$ sont conjugués donc de même module.

Ce dernier résultat signifie que les homographies sont des **isométries hyperboliques**, c'est-à-dire des applications qui conservent la distance hyperbolique.

Nous avons, dans cette partie C., entrevu les bases de la géométrie hyperbolique : il s'agit d'une géométrie non euclidienne, développée par Lobatchewski puis Poincaré. Le demi-plan de Poincaré est un des modèles possibles pour la géométrie hyperbolique. On peut aussi modéliser cette géométrie avec un disque (le disque de Poincaré). En géométrie hyperbolique, par exemple, la quadrature de certains cercles est possible ! L'étude des homographies, objet pourtant assez simple à première vue, est à l'origine de beaucoup de belles mathématiques et est, de manière (très) lointaine, liée à des choses aussi complexes que la preuve du théorème de Fermat !

# Problème 2. Irrationalité de certaines valeurs de cosinus

On s'intéresse dans ce problème à l'irrationalité des $\cos \frac{\pi}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit que $x$ est rationnel (ou que $x \in \mathbb{Q}$) s'il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{p}{q}$.
Si $x \in \mathbb{Q}$, $x$ peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ où $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$ (fraction irréductible).
Un réel qui n'est pas rationnel est dit irrationnel.

## A. Irrationnalité d'un cosinus bissecté

Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $\cos(2x)$ est irrationnel.

**1.** Démontrer que $\cos(x)$, $\tan(x)$ et $\sin(x)$ sont irrationnels.

**Correction**

Si $\cos(x)$ était rationnel, $\cos(2x)$ le serait aussi par la question ci-dessus. De même, si $\sin(x)$ était rationnel, $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ le serait aussi.
Enfin, si $\tan(x)$ était rationnel, $\tan^2(x)$ aussi, donc $\cos^2(x)$ aussi, donc $\cos(2x)$.
Donc ni $\cos(x)$, ni $\tan(x)$, si $\sin(x)$ ne sont rationnels !

**2.** A-t-on de même le résultat suivant : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin(2\theta) \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sin(\theta) \notin \mathbb{Q}$ ?

**Correction**

NON ! $\sin \frac{\pi}{3} \notin \mathbb{Q}$ alors que $\sin \frac{\pi}{6} \in \mathbb{Q}$.

## B. Irrationnalité de $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

Soit $n \geqslant 4$. Le but de cette partie est de démontrer que $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ est irrationnel.

### B-I. Cas $n$ impair

Ici, on suppose $n$ impair (donc supérieur ou égal à 5). Soit $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, tel que $n = 2m + 1$.
On note $\theta = \frac{\pi}{n}$.

**3.** Exprimer $\cos(n\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$.

**Correction**

On écrit que $\cos(n\theta) = \mathfrak{Re}((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n)$, et

$$\begin{aligned}(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(\theta)^{n-k} i^k \sin(\theta)^k \\ &= \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n} \binom{n}{2p} \cos(\theta)^{n-2p} i^{2p} \sin(\theta)^{2p} + \sum_{0\leqslant 2p+1\leqslant n} \binom{n}{2p+1} \cos(\theta)^{n-2p-1} i^{2p+1} \sin(\theta)^{2p+1} \\ &= \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n} \binom{n}{2p} \cos(\theta)^{n-2p} (-1)^p \sin(\theta)^{2p} + i \sum_{0\leqslant 2p+1\leqslant n} \binom{n}{2p+1} \cos(\theta)^{n-2p-1} (-1)^p \sin(\theta)^{2p+1},\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n} \binom{n}{2p} \cos(\theta)^{n-2p} (-1)^p \sin(\theta)^{2p} \\ &= \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n} \binom{n}{2p} \cos(\theta)^{n-2p} (-1)^p (1-\cos(\theta)^2)^p \\ &= \boxed{\sum_{0\leqslant 2p\leqslant n} \binom{n}{2p} \cos(\theta)^{n-2p} (\cos^2(\theta)-1)^p}.\end{aligned}$$

On suppose, par l'absurde, que $\cos(\theta)$ est rationnel. Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, tels que $\operatorname{pgcd}(p, q) = 1$ et tels que $\cos(\theta) = \dfrac{p}{q}$.

**4.** En trouvant une relation arithmétique entre $p$ et $q$, aboutir à une contradiction et conclure.

**Correction**

- On sait que

$$\begin{aligned}-1 = \cos(n\theta) &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \binom{n}{2k} \cos(\theta)^{n-2k} (\cos^2(\theta)-1)^k \\ &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \binom{n}{2k} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-2k} \left(\frac{p^2}{q^2}-1\right)^k.\end{aligned}$$

  Donc, en multipliant tout par $q^n$,

$$\begin{aligned}-q^n &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \binom{n}{2k} p^{n-2k} \left(p^2-q^2\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{2k} p^{n-2k} \left(p^2-q^2\right)^k\end{aligned}$$

  d'où le résultat désiré !

- Puis, comme $n$ est impair, quel que soit $k$ dans $[\![0, m]\!]$, $n-2k \neq 0$. Ainsi, pour tout $k$ dans $[\![0, m]\!]$, $p$ divise $\binom{n}{2k} p^{n-2k} \left(p^2 - q^2\right)^k$, c'est-à-dire $-q^n$.
  Mais $p$ et $q$ sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, $p$ divise $q$.
- Enfin, comme cos est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et que $n \geqslant 4$, $\boxed{0 \leqslant \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{2}}$ donc $\cos \frac{\pi}{n} > \frac{1}{2}$. Ainsi, on ne peut pas avoir $p = 1$ (sinon $\cos(\theta)$ serait l'inverse d'un entier, et différent de 1 ou $\frac{1}{2}$, donc serait $< \frac{1}{2}$).
  Donc $p \geqslant 2$ et $p$ divise $q$, **contradiction** avec le fait que $p$ et $q$ sont premiers entre eux !

### B-II. Cas général

On suppose désormais $n$ quelconque (non nécessairement impair), supérieur ou égal à 4.

**5.** Démontrer que $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ est irrationnel.

**Correction**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ et $m$ impair tels que $n = 2^k \times m$. (en effet, il suffit de diviser par 2 le plus possible, l'entier qui reste est impair)
Par la question précédente, $\cos \frac{\pi}{m}$ est irrationnel.
Par la question 1. et par récurrence immédiate, $\cos \frac{\pi}{2^k m}$ est irrationnel, c'est-à-dire que $\cos \frac{\pi}{n}$ est irrationnel !