MPSI1 – Programme de colles
Semaine 04 – du 9 au 13 octobre 2023

Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral

A - Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités sur les fonctions	
Ensemble de définition.	
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$.
Parité, imparité, périodicité.	Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.
Somme, produit, composée.	
Monotonie (large et stricte).	
Fonctions majorées, minorées, bornées.	Traduction géométrique de ces propriétés. La fonction f est bornée si et seulement si $\lvert f\rvert$ est majorée.
b) Dérivation	
Dérivée d'une fonction.	Notations $f'(x)$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big)$.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.	Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente ; ils ne sont pas démontrés à ce stade. Exemples simples de calculs de dérivées partielles.
Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.	Résultats admis à ce stade.
Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe.	Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités.
Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque.	La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique.
Fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	
Dérivées d'ordre supérieur.	
c) Fonctions usuelles	
Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.	Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$. Logarithme décimal, logarithme en base 2.
Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.	
Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.	
Inégalités $\exp(x) \geqslant 1+x$, $\ln(1+x) \leqslant x$.	
Fonctions circulaires réciproques Arcsin, Arccos, Arctan.	Dérivée, variations, représentation graphique.
Fonctions hyperboliques sh, ch, th.	Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme. La seule formule exigible est $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.
d) Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle	
Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.	La dérivée est définie par les parties réelle et imaginaire.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient. Dérivée de $\exp(\varphi)$ où φ est une fonction dérivable à valeurs complexes.	Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.

Raisonnement et vocabulaire ensembliste – COURS SEULEMENT

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Applications – COURS SEULEMENT	
Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notations $\mathscr{F}(E,F)$ et F^E.
Famille d'éléments d'un ensemble.	
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.	Notation $\mathbb{1}_A$.
Restriction et prolongement.	Notation $f\|_A$.
Image directe.	Notation $f(A)$.
Image réciproque.	Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.
Composition. Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.	

Programme de cette colle : cours sur les fonctions usuelles et sur le début des applications (définitions, images directes et réciproques, injections, surjections) ; exercices sur les fonctions usuelles. À savoir :

— peu de preuves d'analyse ont été faites (sur les formules de dérivation notamment)

— je souhaite que chaque élève ait à dessiner une courbe au moins durant son heure de colle

— absolument aucun exercice sur les applications, il faut que les élèves pratiquent sur les fonctions usuelles.

Exemples de questions de cours

1. Inégalités $\ln(x) \leq x-1$ et $e^x \geq x+1$.
2. tout sur (au choix) exp/ln/polynômes/puissances/homographies/ch/sh/th/sin/cos/tan/arcsin/arccos/arctan (y compris des relations du type $\arctan(x)+\arctan\frac{1}{x}$ ou $\arcsin(x)+\arccos(x)$, ainsi que la détermination de la dérivée des fonctions circulaires réciproques)
3. Croissances comparées.

4. « Associativité » de la composition + Id est un « neutre » pour la composition.
5. Définition de l'image/de l'image réciproque + $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Contre-exemples à l'aide d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
6. Une composée d'injections est injective ; une composée de surjections est surjective.
7. L'exponentielle complexe est surjective de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}$ mais n'est pas injective.
8. Si $f \circ g$ est injective, alors g est injective ; si $f \circ g$ est surjective, alors f est surjective.