

DM 03

à rendre le lundi 16 octobre

Formules

1. Formule 1 : Problème 1 (questions 1 à 12) + exercices 1 et 2 du problème 2. Temps conseillé : 2h + 1h.
2. Formule 2 : Problème 1 + exercices 2 et 3 du problème 2. Temps conseillé : 2h + 2h.
3. Bonus : Problème 3, un joli problème sur une fonction permettant de dénombrer les rationnels ! Pour ce problème seul, 3h seront nécessaires.
Possibilité de rendre ce bonus le vendredi avant les vacances.

Problème 1. Étude du gudermannien

On définit, pour tout t dans $\mathbb{R}$, le *gudermannien* de t , noté $\text{gd}(t)$, par $\text{gd}(t) = 2\text{Arctan}(e^t) - \frac{\pi}{2}$.

A. Étude de fonction

1. Tracer le graphe de la fonction Arctan . Préciser la valeur en 0, les asymptotes éventuelles.
2. Démontrer que pour tout t dans $\mathbb{R}$, $-\frac{\pi}{2} < \text{gd}(t) < \frac{\pi}{2}$.
3. Déterminer le signe de gd sur $\mathbb{R}$, puis son ensemble de dérivabilité, sa dérivée et ses variations. Préciser $\text{gd}(0)$ et l'équation de la tangente à la courbe de gd en 0.
4. Déterminer les limites de gd en $\pm\infty$.
5. Tracer le graphe de gd .

B. Quelques identités

6. Démontrer que pour tout t dans $\mathbb{R}$, $\tan(\text{gd}(t))$ est définie et est égale à $\text{sh}(t)$.
7. Démontrer les deux autres identités suivantes : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\text{gd}(t)) = \frac{1}{\text{ch}(t)} \text{ et } \sin(\text{gd}(t)) = \text{th}(t).$$

C. Fonction réciproque de gd

8. Soit a dans $] -1, 1[$. Résoudre l'équation $\text{th}(x) = a$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
9. Démontrer que la fonction gd est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et préciser l'expression de sa bijection réciproque. On la nomme « arc gudermannien » et on la note arcdg .
10. Démontrer que pour tout θ dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\text{arcdg}(\theta) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin(\theta)}{1 - \sin(\theta)} \right)$.
11. Représenter les courbes de gd et arcdg sur un même graphe. On précisera les valeurs en 0 et les asymptotes éventuelles.
12. Démontrer que arcdg est dérivable en tout point de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et exprimer sa dérivée simplement à l'aide de fonctions usuelles.

13. Démontrer que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note sa bijection réciproque Argsh .
On admettra que th est une bijection de $] -1, 1[$ dans $\mathbb{R}$ et on notera sa bijection réciproque Argth .
14. Démontrer que pour tout x dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$\operatorname{arctgd}(x) = \operatorname{Argsh}(\tan(x)) = \operatorname{Argth}(\sin(x)) = 2\operatorname{Argth}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

Problème 2. Exercices sur les applications

Exercice 1. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^* \\ z \mapsto e^z \end{cases}$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Déterminer $f(i\mathbb{R})$ et $f^{-1}(i\mathbb{R})$.

Exercice 2. On note, si $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^\alpha \end{cases}$ Soit E l'ensemble des fonctions puissances. Soient

$$\varphi : \begin{cases} E \rightarrow E \\ f \mapsto f \times f \end{cases} \text{ et } \psi : \begin{cases} E \rightarrow E \\ f \mapsto f \circ f \end{cases}$$

1. Vérifier que φ et ψ sont à valeurs dans E .
2. φ et ψ sont-elles bijectives ? Si oui, donner leur bijection réciproque.

Exercice 3. Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$. On considère l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(F) \\ A \mapsto f(A) \end{cases},$$

où $f(A)$ désigne l'image directe de A par f . On considère l'application

$$\psi : \begin{cases} \mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ B \mapsto f^{-1}(B) \end{cases},$$

où $f^{-1}(B)$ désigne l'image réciproque de B par f .

1. Soient A dans $\mathcal{P}(E)$ et B dans $\mathcal{P}(F)$. Rappeler les définitions de $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.
2. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (i) f est injective
 - (ii) φ est injective
 - (iii) ψ est surjective
3. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (i) f est surjective
 - (ii) φ est surjective
 - (iii) ψ est injective

Problème 3. Questions de dénombrabilité

Soit A un ensemble. On dit que A est **dénombrable** s'il existe une bijection φ de $\mathbb{N}$ dans A . Ce problème étudie, via 3 parties indépendantes, cette notion.

A. Quelques exemples

1. Démontrer que $\mathbb{N}^*$ est dénombrable. Démontrer que l'ensemble des entiers pairs, noté $2\mathbb{N}$, est dénombrable. *On explicitera des bijections ; pour montrer qu'il s'agit de bijections, il suffira d'en donner la bijection réciproque, sans faire toutes les vérifications nécessaires.*

2. Démontrer **proprement** que $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$

$$n \mapsto \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0 \\ -2n - 1 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$
est une bijection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$.
En déduire la dénombrabilité de $\mathbb{Z}$.

3. On démontre ici que l'ensemble des suites dont les termes sont des « 0 » ou des « 1 », $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable. On suppose qu'il existe $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, bijective. Construire une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout n , $u_n \neq \psi(n)(n)$, et conclure.
Cette question peut être passée sans problème.

B. $\mathbb{Q}$ est dénombrable

B-I. Étude de la fonction de Calkin-Wilf

Si x est un réel, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand entier k inférieur ou égal à x . On note $\{x\}$ sa partie fractionnaire : $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

4. Démontrer que la fonction $x \mapsto \{x\}$ est 1-périodique, à valeurs dans $[0, 1[$ et donner l'allure de sa courbe.
5. Démontrer que pour tout $x \geq 0$, $\lfloor x \rfloor + 1 - \{x\} > 0$.

On définit alors la fonction de Calkin-Wilf, notée f (et bien définie, par la question précédente), par

$$f : \begin{cases} [0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[\\ x \mapsto \frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1 - \{x\}} \end{cases}.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'expression exacte de f sur $[n, n+1[$, ainsi que ses variations. Préciser la valeur en n et la limite à gauche en $n+1$.
7. Démontrer que, pour tout $x > 1$, $f(x) \leq \frac{1}{x-1}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
8. Tracer l'allure du graphe de f .

On définit

$$g : \begin{cases}]0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[\\ y \mapsto \begin{cases} \left\lfloor \frac{1}{y} \right\rfloor + 1 - \left\{ \frac{1}{y} \right\} & \text{si } \frac{1}{y} \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{y} - 1 & \text{si } \frac{1}{y} \in \mathbb{N} \end{cases} \end{cases}$$

9. Vérifier que g est la bijection réciproque de f .

B-II. Manipulation d'une suite récurrente

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

10. Calculer les termes u_n pour n allant de 1 à 5. Le mettre sous forme irréductible si nécessaire.

11. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Q}_+^*$.

Notre but est de démontrer que l'application φ définie comme suit est bijective :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}_+^* \\ n \mapsto u_n \end{cases}.$$

On remarque que, par récurrence immédiate, pour tout entier naturel n ,

$$\varphi(n) = u_n = f(u_{n-1}) = f(f(u_{n-2})) = \cdots = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}(u_0) = f^n(u_0),$$

l'écriture f^n étant une notation pour désigner $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

B-III. Injectivité

12. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = 1 \Rightarrow n = 0$.

13. En déduire que l'application φ est injective.

B-IV. Surjectivité

Pour démontrer la surjectivité, nous introduisons une quantité, appelée **poids** d'un rationnel.

Définition 1

Soit $r \in \mathbb{Q}_+^*$, $r = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $\text{pgcd}(p, q) = 1$.

Le poids de r , noté $\omega(r)$, est la quantité $\omega(r) = p + q$. En particulier, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega\left(\frac{n}{1}\right) = n + 1$.

On note, pour $m \in \mathbb{N}^*$, $W_m = \{r \in \mathbb{Q}_+^*, \omega(r) = m\}$.

14. Déterminer W_2, W_3, W_4 .

15. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{Q}_+^*, \forall (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2, x = \frac{a}{b} \Rightarrow \omega(x) \leq a + b$.
Ici, on n'a pas nécessairement $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

16. Démontrer que

- $\forall x \in \mathbb{Q} \cap]1, +\infty[, \omega(x - 1) < \omega(x)$,
- $\forall x \in \mathbb{Q} \cap]0, 1[, \omega\left(\frac{x}{1-x}\right) < \omega(x)$.

On introduit alors, naturellement,

$$\sigma : \begin{cases} [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[\\ x \mapsto x - 1 \end{cases}, \quad \alpha : \begin{cases} [0, 1[\rightarrow [0, +\infty[\\ x \mapsto \frac{x}{1-x} \end{cases}$$

On voit déjà très simplement que σ est bijective et que $\sigma^{-1} : x \mapsto x + 1$.

17. Vérifier la bijectivité de α et préciser une expression de α^{-1} .
18. Démontrer que $f \circ \alpha^{-1} = \sigma^{-1}$.
19. Démontrer que $f \circ \sigma^{-1} = \alpha^{-1} \circ f$.
20. En déduire enfin que $\sigma^{-1} \circ f = f \circ f \circ \sigma^{-1}$.
21. En utilisant les relations ci-dessus, conclure par récurrence sur le poids que φ est surjective.
Proposition de stratégie :
- On pourra remarquer, dans l'hérédité, que si $x \in \mathbb{Q}_+^*$, on peut construire un rationnel de poids strictement inférieur à x .
 - On rappelle que si $p \in \mathbb{N}$, $u_p = f^p(x)$.
 - On rappelle que $x = \alpha^{-1} \circ \alpha(x)$ et $x = \sigma^{-1} \circ \sigma(x)$.
 - On pourra ensuite utiliser les relations 18., 19. ou 20. pour conclure.

B-V. Conclusion

22. Conclure alors que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

C. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

Histoire de voir si vous lisez bien le sujet intégralement, et, notamment, regardez de quoi parle chaque partie, je mets 1 point sur le barème si vous écrivez « Bonnes vacances!! » au début de votre DS.

Dans cette partie, un peu différente des autres, on montre, au contraire, que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. On suppose par l'absurde que $\mathbb{R}$ est dénombrable. Notons $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des réels. On rappelle le théorème suivant, lié aux suites réelles :

Proposition 2

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante,
- $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$.

Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ .

23. Expliciter deux réels a_0 et b_0 tels que $x_0 \notin [a_0, b_0]$.
24. Démontrer l'existence, de deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$,
 - $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \notin [a_n, b_n]$,
 - $\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \frac{1}{3^n}(b_0 - a_0)$.

On demande obligatoirement un **dessin** illustrant la construction des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

25. En considérant $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$, aboutir à une contradiction.

Ainsi, nous avons montré que $\mathbb{R}$ n'était pas dénombrable.