

MPSI1 – Programme de colles

Semaine 05 – du 16 au 20 octobre 2023

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Applications et relations	
Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F . Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notations $\mathcal{F}(E, F)$ et F^E .
Famille d'éléments d'un ensemble. Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble. Restriction et prolongement. Image directe. Image réciproque.	Notation $\mathbb{1}_A$. Notation $f _A$. Notation $f(A)$. Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.
Composition. Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections. Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée. Relation binaire sur un ensemble. Relation d'équivalence, classes d'équivalence.	Notation f^{-1} . Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque. La notion d'ensemble quotient est hors programme. Les classes d'équivalence forment une partition de l'ensemble sous-jacent. Congruences dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{Z}$. Notation $a \equiv b [c]$.

Programme de cette colle : cours sur les applications et le début des relations d'équivalence. Exercices uniquement sur les applications entre ensembles.

Exemples de questions de cours

- « Associativité » de la composition + Id est un « neutre » pour la composition.
- Définition de l'image/de l'image réciproque + $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Contre-exemples à l'aide d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- Une composée d'injections est injective ; une composée de surjections est surjective.
- L'exponentielle complexe est surjective de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}$ mais n'est pas injective.
- Si $f \circ g$ est injective, alors g est injective ; si $f \circ g$ est surjective, alors f est surjective.
- Équivalence des définitions d'une bijection (injective et surjective / $\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y$ / existence d'une bijection réciproque)
- Unicité de la bijection réciproque ; bijectivité de f^{-1} , de $g \circ f$.
- Définition d'une fonction indicatrice ; l'application $A \mapsto \mathbb{1}_A$ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ dans $\{0, 1\}^E$.
- Définition d'une relation d'équivalence ; démonstration qu'une des relations vues en cours (congruence, équipotence entre parties d'un ensemble E) ou une autre, simple, est une relation d'équivalence.
- Définition d'une classe d'équivalence ; les classes d'équivalence partitionnent un ensemble ; si $f : E \rightarrow F, E = \bigsqcup_{x \in F} f^{-1}(\{x\})$.