Chapitre 5
Applications et relations

1 Correspondances – applications – fonctions

1.1 Définitions générales

Remarque 1

Les définitions qui suivent ne sont pas exigibles (hors-programme). On peut se tenir à la définition « intuitive » d'une application comme d'une « machine qui prend un objet et renvoie un autre objet » .

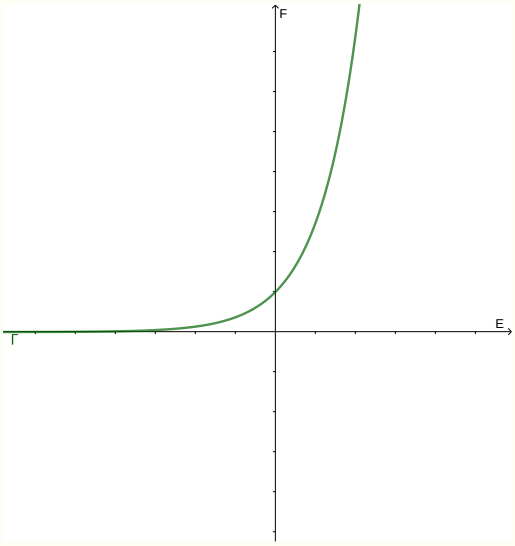
On va d'abord définir un objet qui permettra d'englober la définition des deux objets principaux de ce chapitre que sont les applications et les relations.

Définition 2

Soient E et F deux ensembles. On appelle correspondance de E vers F tout triplet (E, F, Γ) où $\Gamma \subset E \times F$.
Γ est appelé graphe de la correspondance.

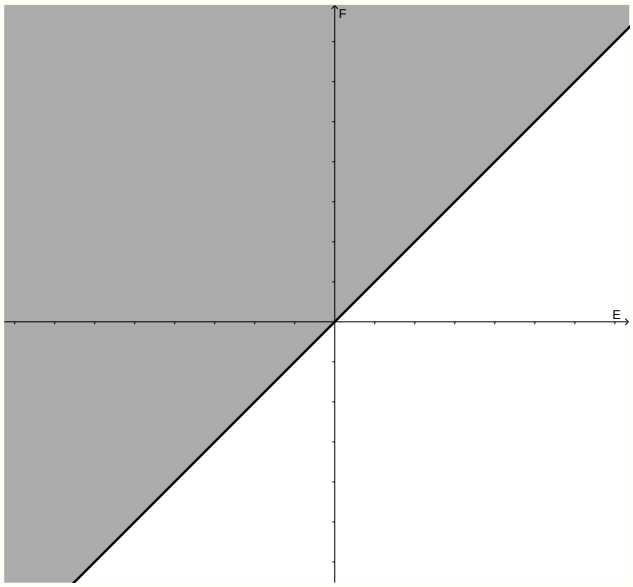
Exemple 3

1. Si $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$ et $\Gamma = \{(x, y) \in E \times F,\ y = e^x\}$.

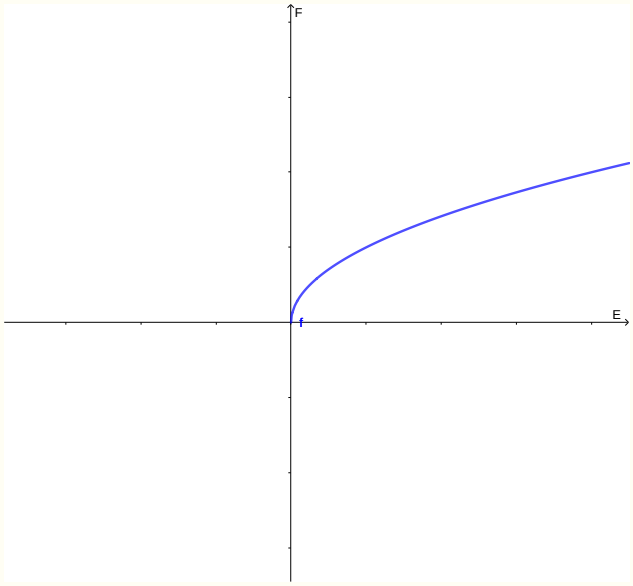


2. Si $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$ et $\Gamma = \{(x, y) \in E \times F,\ x \leqslant y\}$.

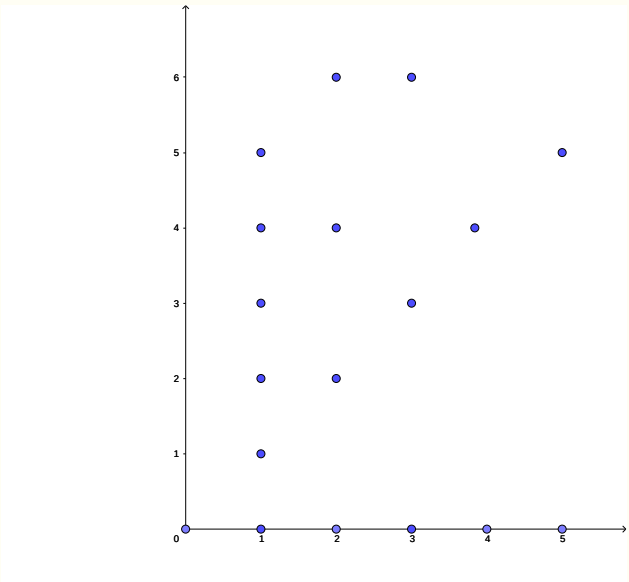
N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com



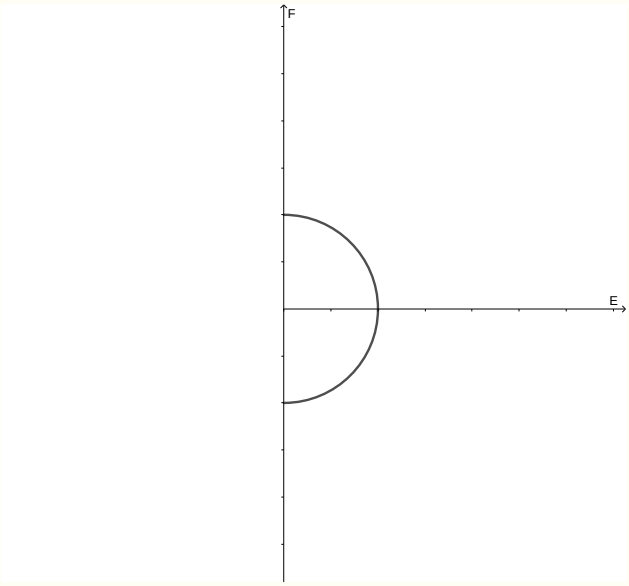
3. Si $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$ et $\Gamma = \{(x, y) \in E \times F,\ x \geqslant 0 \text{ et } y = \sqrt{x}\}$.



4. Si $E = \mathbb{N}^*$, $F = \mathbb{N}^*$, et $\Gamma = \{(m, n) \in E \times F,\ m \text{ divise } n\}$.



5. Si $E = \mathbb{R}_+$, $F = \mathbb{R}$ et $\Gamma = \{(x, y) \in E \times F,\ x^2 + y^2 = 1\}$.



6. Si A est un ensemble, si $E = \mathcal{P}(A)$, $F = \mathcal{P}(A)$ et $\Gamma = \{(U, V) \in E \times F,\ U \subset V\}$.

Définition 4

Soient E et F deux ensembles, $\Gamma \subset E \times F$.
Soit pour tout x dans E, F_x l'ensemble $F_x = \{y \in F,\ (x, y) \in \Gamma\}$.
La correspondance (E, F, Γ) définit une **application** si pour tout x de E, F_x est un singleton.

On définit alors l'application f par : pour tout x dans E, $f(x)$ est l'unique élément de F_x.

Exemple 5

Dans les exemples précédents, seul 1. définit une application. En effet,

- le problème de 2., 4. et 6. est que chaque élément de E a beaucoup trop d'éléments de F correspondants !
- le problème de 3. est plus subtile : c'est qu'on l'a définie sur un trop gros ensemble ! En effet, si on avait pris $E = \mathbb{R}_+$, là on aurait défini une application.
- de même, si on avait défini 5. avec $F = \mathbb{R}_+$, alors on aurait défini une application.

Remarque 6

1. **À RETENIR.**
   Une application $f : E \to F$ associe à tout élément x de E une unique image $f(x)$ dans F.
2. De vieux manuels distinguent les mots « fonction » et « application » : nous ne ferons pas ce distinguo ici.

Notation 7

1. Désormais, on ne note plus (E, F, Γ) pour parler d'une applicatiojn mais $f : E \to F$.
2. L'ensemble des applications d'un ensemble E dans un ensemble F est noté F^E.

Définition 8 (Restriction, prolongement)

Soit $f : E \to F$ une application.

(i) Soit $E' \subset E$. La restriction de f à E', notée $f_{|E'}$, est l'application

$$f_{|E'} : \begin{cases} E' \to F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

(ii) Soit E'' tel que $E \subset E''$, et $g : E'' \to F$. On dit que g est un prolongement de f si $g_{|E} = f$.

Exemple 9

Soient φ, ψ et μ les trois fonctions suivantes :

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right. , \ \psi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right. , \ \mu : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} -x^2 \text{ si } x < 0 \\ x^2 \text{ sinon.} \end{cases} \end{array} \right.$$

alors ψ et μ sont deux prolongements de φ, mais ils ne sont pas égaux.

Définition 10

Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Alors la composée de f par g, notée $g \circ f$ et lue « g rond f » est l'application de E dans G définie par

$$\forall x \in E, g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Définition 11

Soit E un ensemble. L'identité de E, ou application identité de E, est l'application notée Id_E et définie par

$$\mathrm{Id}_E : \left| \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto x \end{array} \right. .$$

Proposition 12 (Propriétés de la composition)

1. (« associativité »)
   Soient E, F, G et H quatre ensembles, $f \in F^E$, $g \in G^F$, $h \in H^G$. Alors
   $$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$
   On note alors cette fonction $f \circ g \circ f$.
2. (élément neutre)
   Si E et F sont deux ensembles, $f \in F^E$. Alors
   $$\mathrm{Id}_F \circ f = f \circ \mathrm{Id}_E = f.$$

Démonstration

Ce qui est important, c'est le

Point de méthode 13

Pour montrer que deux applications φ et ψ sont égales, il faut vérifier qu'elles ont le même ensemble de départ A et d'arrivée B et que

$$\forall x \in A,\ \varphi(x) = \psi(x).$$

Lorsque les ensembles de départ et d'arrivée sont donnés comme étant les mêmes, pas besoin de s'attarder sur ce point !

1. Soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f)(c) &= h(g \circ f(x)) \\ &= h(g(f(x))) \\ &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= (h \circ g) \circ f(x), \end{aligned}$$

donc $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

2. Soit $x \in E$. Alors

$$\mathrm{Id}_F \circ f(x) = \mathrm{Id}_F(f(x)) = f(x)$$

et

$$f \circ \mathrm{Id}_E(x) = f(\mathrm{Id}_E(x)) = f(x),$$

donc $\mathrm{Id}_F \circ f = f \circ \mathrm{Id}_E = f$.

■

Définition 14

Soit E un ensemble, $f : E \to E$. Un élément x de E est un point fixe de f si $f(x) = x$.

Exemple 15

1. L'identité est la seule application dont tous les éléments de l'ensemble de départ sont des points fixes.

2. Si $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$, alors f admet exactement deux points fixes, 0 et 1.

3. Les similitudes directes non dégénérées et qui ne sont pas des translations ont exactement un point fixe.

1.2 Images et antécédents

Définition 16

Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application.

(i)
- L'image d'un élément x de E est l'élément $f(x) \in F$.
- Si $A \subset E$, l'image directe de A par f est l'ensemble

$$f(A) = \{f(x), x \in A\}.$$

(ii)
- Un antécédent de $y \in F$ est un élément x de E tel que $f(x) = y$.
- Si $B \subset F$, l'image réciproque de B par f est l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des antécédents des éléments de B par f.

Remarque 17

Remarquons la manière d'exprimer l'appartenance à une image directe ou réciproque :

$$\forall y \in F,\ y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A,\ y = f(x).$$

Exercice 18

Soit $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$. Déterminer

$$f(\{-1, 1\}),\ f([-1, 3]),\ f^{-1}(\{2\}),\ f^{-1}([-1, 2]).$$

Remarque 19

Attention à la nature des objets !

- dans les notations précédentes, on ne dit pas que « f^{-1} » existe : la notion d'image réciproque est décorrélée de celle de bijectivité.
- remarquer que si x est un élément de E, alors $f(x)$ est un élément de F,
- en revanche, si A est une partie de E, $f(A)$ est une partie de F.

Exercice 20

Si $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$, déterminer

$$f^{-1}(f([1,3])) \text{ et } f(f^{-1}([-1,2])).$$

Proposition 21

Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$. Alors

(i) $A \subset f^{-1}(f(A))$.

(ii) $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

La réciproque est fausse en général.

Démonstration

1. Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$ par définition. Donc $x \in f^{-1}(f(A))$.
2. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Alors on dispose de x dans $f^{-1}(B0$ tel que $y = f(x)$.
   Or, $x \in f^{-1}(B)$ donc $f(x) \in B$, donc $y \in B$.

Pour démontrer que la réciproque est fausse, prendre les contre-exemples de l'exercice précédent. ■

Que manque-t-il à la fonction f de l'exemple précédent pour avoir égalités entre $f^{-1}(f(A))$ et A ? Entre $f(f^{-1}(B))$ et B ?

1.3 Injections, surjections, bijections

Définition 22

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est injective ou que f est une injection si

$$\forall (x, x') \in E^2,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

Cette définition équivaut aussi à sa contraposée

$$\forall (x, x') \in E^2,\ (f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x').$$

Point de méthode 23

Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est injective on procède comme suit :

Soient $(x, x') \in E^2$ tels que $f(x) = f(x')$.

Montrons que $x = x'$.

Exemple 24

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement monotone, montrons que f est injective.
On peut, sans perte de généralité, supposer que f est strictement croissante.

Démonstration

Soit $(x, x') \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \neq x'$.

- si $x < x'$, alors $f(x) < f(x')$, donc $f(x) \neq f(x')$,
- si $x > x'$, alors $f(x) > f(x')$, donc $f(x) \neq f(x')$.

Donc f est injective. ■

2. Une fonction croissante (pas strictement) n'est pas nécessairement injective. Ainsi $f : \begin{array}{|l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \end{array}$ n'est pas injective.

Démonstration

Posons $x = 0$ et $x' = 1$. Alors $x \neq x'$ **ET** $f(x) = 1 = f(x')$.
Donc f n'est pas injective. ■

3. Si $\varphi_n : \begin{array}{|l} [\![0, n-1]\!] \to \mathbb{C} \\ k \mapsto \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \end{array}$, alors φ_n est injective.

Démonstration

Soit $(k, \ell) \in [\![0, n-1]\!]$ tels que $\varphi_n(k) = \varphi_n(\ell)$.
Alors $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{2i\ell\pi}{n}}$. Donc $\dfrac{2k\pi}{n} = \dfrac{2\ell\pi}{n} [2\pi]$,
donc on dispose de $p \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{2ik\pi}{n} = \dfrac{2i\ell\pi}{n} + 2p\pi$, i.e. $k - \ell = pn$.
Or, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $-(n-1) \leqslant -\ell \leqslant 0$, donc $|k - \ell| \leqslant n - 1 < n$.
Comme si $p \neq 0$, $|pn| \geqslant n$, nécessairement, $p = 0$ et $\boxed{k = \ell.}$
Donc φ_n est injective. ■

Remarque 25

L'injectivité dépend de l'ensemble de départ. Ainsi,

$$f : \begin{array}{|l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$$

n'est pas injective, alors que

$$g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$$

l'est !

Définition 26

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est surjective ou que f est une surjection si

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y.$$

Point de méthode 27

Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est surjective, on procède comme suit :

Soit $y \in F$.
Cherchons $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Exemple 28

1. La fonction $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$ est surjective.

Démonstration

Soit $y \in \mathbb{R}_+$. Posons $x = \sqrt{y}$. Alors $f(x) = (\sqrt{y})^2 = y$.
Donc f est surjective. ■

2. Comment nier la surjectivité ?

$$\exists y \in F, \ \forall x \in E, \ y \neq f(x).$$

3. Ainsi, la fonction $g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$ n'est pas surjective.

Démonstration

Posons $y = -1$.
Alors pour tout x dans $\mathbb{R}$, $g(x) = x^2 \neq -1$. Donc g n'est pas surjective. ■

Remarque 29

La surjectivité dépend donc du choix de l'ensemble d'arrivée !

Proposition 30

L'exponentielle complexe $z \mapsto e^z$ est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$ mais pas injective.

Démonstration

La propriété a été démontrée dans le chapitre sur les compelxes. ■

Proposition 31 (Propriétés des injections)

Soient E, F et G trois ensembles, $f \in F^E$, $g \in G^F$.

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

Démonstration

1. Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, i.e.
$$g(f(x)) = g(f(x')).$$
Or, g est injective, donc $f(x) = f(x')$.
Or, f est injective donc $x = x'$.
2. Soit $y \in G$.
g est surjective donc on dispose de $x \in F$ tel que $g(x) = y$.
f est surjective donc on dispose de $\alpha \in E$ tel que $f(\alpha) = x$.
Alors
$$g \circ f(\alpha) = g(f(\alpha)) = g(x) = y,$$
donc $g \circ f$ est surjective.

■

Proposition 32 (Hors-programme mais très classique !)

Soient E, F et G trois ensembles, $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

1. si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Démonstration

1. On suppose $g \circ f$ injective.
   Soit $(x, x') \in E^2$ tels que $f(x) = f(x')$.
   Alors $g(f(x)) = g(f(x'))$, i.e. $g \circ f(x) = g \circ f(x')$.
   Or, $g \circ f$ est injective, donc $x = x'$.
   Donc f est injective.
2. On suppose que $g \circ f$ est surjective.

■

Remarque 33

Les morceaux manquants de la proposition précédente sont faux en général !

- Si $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^x \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$, alors

$$g \circ f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \mathrm{e}^{2x} \end{array} \right.$$

  est injective, mais g n'est pas injective.
- Si $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{Arctan}(x) \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \tan(x) \text{ si } x \neq \frac{\pi}{2}[\pi], \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \end{array} \right.$

  alors f n'est pas surjective mais $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, donc $g \circ f$ est surjective.

Définition 34 (et prop)

Soit $f : E \to F$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) f est une injection et une surjection,

(ii) $\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x)$,

(iii) il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

Dans ce cas on dit que f est bijective ou que f est une bijection de E dans F.
L'application g ainsi trouvée est alors unique, on l'appelle bijection réciproque de f et on note $g = f^{-1}$.

Démonstration

On va montrer l'équivalence des trois propositions par implication circulaire.

- $\boxed{\text{(i)}\Rightarrow\text{(ii)}}$ Supposons que f est une injection et une surjection. Soit y dans F. Alors comme f est une surjection, on dispose de x dans E tel que $f(x) = y$.
  Soit ensuite a dans E tel que $f(a) = y = f(x)$. Par injectivité de f, $a = x$, donc x est unique.
  D'où le (ii).

- (ii)⇒(iii) Supposons que
$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ f(x) = y.$$
Définissons g ainsi : pour tout y de F, $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f.
Démontrons alors que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
  - soit $y \in F$. Alors $g(y)$ est un antécédent de y par f. Donc $f(g(y)) = y$.
  - soit $x \in E$. Alors comme x est un antécédent de $f(x)$ par f et que $g(f(x))$ est l'unique antécédent de $f(x)$ par f, $g(f(x)) = x$.

  Donc $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
- (iii)⇒(i) Supposons que l'on dispose de $g \in E^F$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. Alors
  - $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ donc $g \circ f$ est injective donc, par la proposition précédente, f est injective,
  - $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ donc $f \circ g$ est surjective donc f est surjective.

  Donc f est injective et surjective.

D'où l'équivalence des trois propositions par implications circulaires.
Unicité de g. Soient g et h deux applications de F dans E telles que
$$\begin{cases} g \circ f = \mathrm{Id}_E \\ f \circ g = \mathrm{Id}_F \end{cases} \text{ et } \begin{cases} h \circ f = \mathrm{Id}_E \\ f \circ h = \mathrm{Id}_F \end{cases}$$
Alors, en composant $g \circ f$ à droite par h,
$$(g \circ f) \circ h = \mathrm{Id}_E \circ h = h,$$
donc, par associativité,
$$g \circ (f \circ h) = h,$$
i.e.
$$h = g \circ \mathrm{Id}_E = g,$$
d'où l'unicité d'une telle application ! ■

Remarque 35

Ne pas confondre $f^{-1}(B)$ quand $B \subset F$, qui est défini quelle que soit f, et $f^{-1}(y)$, $y \in F$, qui n'a de sens que si f est bijective. On a heureusement la proposition suivante.

Proposition 36

Soit $f : E \to F$, bijective, $B \subset F$.
Alors l'image réciproque de B par f est égale à l'image directe de B par f^{-1}.

Démonstration

Notons A l'image réciproque de B par f et C l'image directe de B par f^{-1}. Ainsi

$$A = \{x \in E,\ f(x) \in B\}$$
$$C = \{x \in E,\ \exists y \in B,\ x = f^{-1}(y)\}.$$

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in A$. ALors $f(x) \in B$, i.e. on dispose de $Y \in B$ tel que $f(x) = y$. Comme f est bijective, $x = f^{-1}(y)$ donc $x \in C$.

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in C$. Alors on dispose de y dans B tel que $x = f^{-1}(y)$. Donc $f(x) = f(f^{-1}(y)) = y \in B$, donc $x \in A$.

D'où l'inclusion réciproque et l'égalité. ■

Proposition 37

Soient E, F et G trois ensembles, $\varphi \in F^E$ et $\psi \in G^F$.
Si φ et ψ sont bijectives, alors $\psi \circ \varphi$ est bijective et

$$(\psi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}.$$

Démonstration

Faisons le calcul

$$\begin{aligned}(\varphi^{-1} \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi) &= \varphi^{-1} \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi \\ &= \varphi^{-1} \circ \mathrm{Id}_F \circ \varphi \\ &= \varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{Id}_E.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}(\psi \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \psi^{-1}) &= \psi \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \psi^{-1} \\ &= \psi \circ \mathrm{Id}_F \circ \psi^{-1} \\ &= \psi \circ \psi^{-1} = \mathrm{Id}_G\end{aligned}$$

Donc $\psi \circ \varphi$ est bijective de bijection réciproque $\varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$. ■

Point de méthode 38

La définition d'une bijection nous montre trois méthodes pour démontrer qu'une application est bijective.

- On montre qu'elle est injective et surjective.
  Exemple. Soit
  $$\varphi_n : \left| \begin{array}{l} [\![0, n-1]\!] \to \mathbb{U}_n \\ k \mapsto \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \end{array} \right.$$
  On a déjà démontré dans la partie sur l'injectivité que φ_n était injective. Pour la surjectivité

, on a démontré dans le chapitre sur les nombres complexes que

$$\forall \omega \in \mathbb{U}_n,\ \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \omega = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

Donc φ_n est bijective.

- On peut résoudre, pour tout y de F, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x.
  Exemple. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$, soit f l'homographie

$$f : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{-d}{c} \right\} \to \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{a}{c} \right\} \\ x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d} \end{array} \right. .$$

  Montrons que f est bijective.
  Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{a}{c} \right\}$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{-d}{c} \right\}$. Alors on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{ax+b}{cx+d} = y \\ &\Leftrightarrow ax + b = y(cx + d) \\ &\Leftrightarrow (a - cy)x = yd - b \\ &\Leftrightarrow x = \frac{yd-b}{a-cy} \text{ car } y \neq \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

  Donc $\forall y \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{a}{c} \right\}$, $\exists! x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{-d}{c} \right\}$ tel que $f(x) = y$.
  Remarque : cette méthode nous donne aussi la bijection réciproque de f. La bijection réciproque est

$$f^{-1} : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{a}{c} \right\} \to \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{-d}{c} \right\} \\ y \mapsto \dfrac{yd-b}{a-cy} \end{array} \right. .$$

- Enfin, on peut trouver directement une bijection réciproque et vérifier que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
  Exemple. Soit

$$\kappa : \left| \begin{array}{c} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \overline{z} \end{array} \right. .$$

  Montrons que κ est bijective. On remarque que pour tout z dans $\mathbb{C}$,

$$\kappa \circ \kappa(z) = \overline{\overline{z}} = z,$$

  donc $\kappa \circ \kappa = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ donc κ est bijective et est sa propre bijection réciproque.

Définition 39

Soit $f : E \to E$. On dit que f est une involution si $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

Exemple 40

Ainsi, si E est un ensemble,

$$\eta : \left| \begin{array}{c} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \\ A \mapsto E \setminus A \end{array} \right.$$

est une involution.

Définition 41

Soit E un ensemble fini. On appelle cardinal le nombre de ses éléments et on le note indifféremment $|E|$, $\sharp E$ ou $\mathrm{Card}(E)$.

Proposition 42 (Applications sur des ensembles finis)

Soient E et F deux ensembles finis.

1. Si $\mathrm{Card}(E) < \mathrm{Card}(F)$, il n'existe pas de surjection de E vers F.
2. Si $\mathrm{Card}(E) > \mathrm{Card}(F)$, il n'existe pas d'injection de E vers F.
3. Si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$, alors pour toute application $f : E \to F$, les assertions suivantes sont équivalentes :
   - f est une injection.
   - f est une surjection.
   - f est une bijection.

Exercice 43

Soit f l'application définie de $\mathbb{U}_n$ dans $\mathbb{U}_n$ (n entier non nul) par

$$\forall \omega \in \mathbb{U}_n,\ f(z) = z^2.$$

Déterminer une condition sur n pour que f soit une bijection de $\mathbb{U}_n$ dans lui-même.

Proposition 44 (Changement de variables bijectif)

Soient E et F deux ensembles finis, φ une bijection entre E et F.
Soit $(a_f)_{f \in F}$ une famille de complexes indexée sur les éléments de E. Alors

$$\sum_{e \in E} a_{\varphi(E)} = \sum_{f \in F} a_f.$$

Exemple 45

Par exemple, $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ est clairement une bijection de $\mathbb{U}_n$ dans $\mathbb{U}_n$ (car c'est une involution), donc

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{1}{\omega} = \sum_{\alpha \in \mathbb{U}_n} \alpha.$$

1.4 Fonctions indicatrices d'ensembles

Définition 46

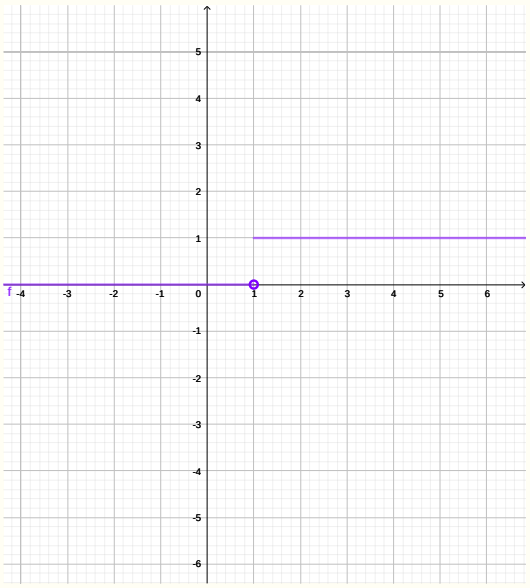
Soit E un ensemble, $A \subset E$. La fonction indicatrice de A est l'application $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$ définie comme suit

$$\forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Exemple 47

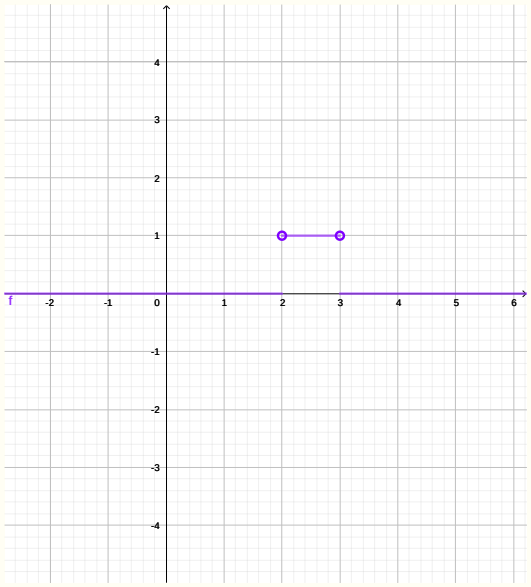
Regardons quelques exemples si $E = \mathbb{R}$.

1. $\mathbb{1}_{]1,+\infty[}$,

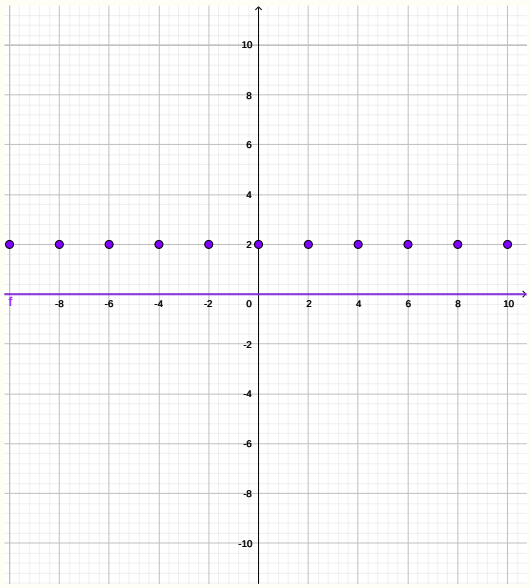


2. $\mathbb{1}_{[2,3]}$,

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

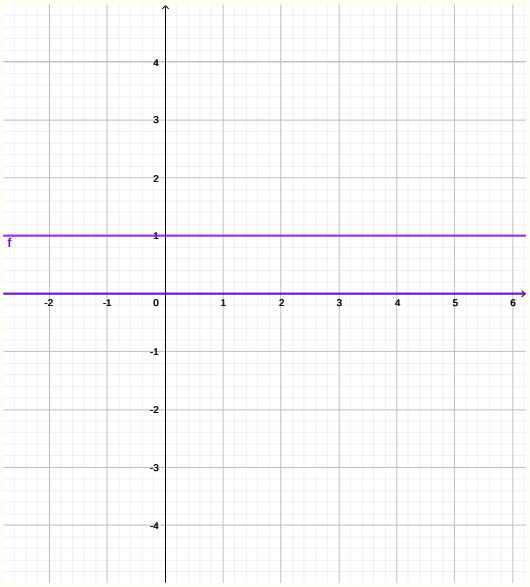


3. $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}$,



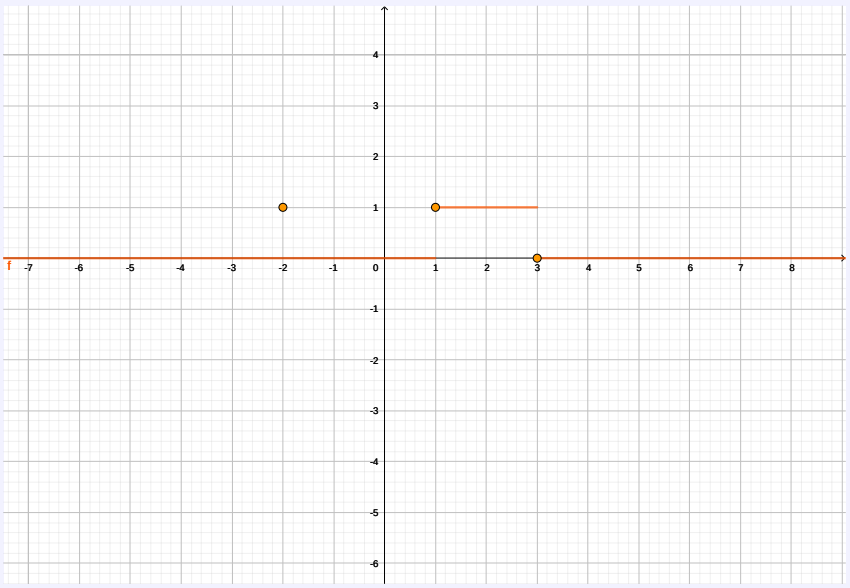
4. $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, aussi appelée fonction de Dirichlet : ne vous méprenez pas, il s'agit bien d'une application, sauf qu'on ne voit pas quels points sont dans $\mathbb{Q}$ et dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$!

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com



Remarque 48

On a vu qu'à toute partie de E, on pouvait associer une fonction de E dans $\{0,1\}$.
Soit, réciproquement, φ une fonction de E dans $\{0,1\}$: peut-on l'exprimer comme une fonction indicatrice d'une partie de E ? Par exemple, peut-on trouver A tel que la fonction suivante soit $\mathbb{1}_A$?



En fait, cette propriété est généralisable !

Proposition 49

Soit E un ensemble. L'application

$$\chi : \left| \begin{array}{l} \mathcal{P}(E) \to \{0,1\}^E \\ A \mapsto \mathbb{1}_A \end{array} \right.$$

est bijective, de bijection réciproque

$$\chi^{-1} : \left| \begin{array}{l} \{0,1\}^E \to \mathcal{P}(E) \\ \varphi \mapsto \varphi^{-1}(\{1\}) \end{array} \right. .$$

Remarque 50

Il ne faut pas avoir peur d'applications qui prennent en argument des applications. Ainsi,

1. Si D est l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et

$$\delta : \left| \begin{array}{l} D \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f \mapsto f' \end{array} \right. ,$$

δ définit bien une application. Par exemple,

$$\delta(\exp) = \exp,\ \delta(\sin) = \cos,\ \delta(\tan) = 1 + \tan^2,\ \delta(\text{Arcsin}) = x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. En SI, vous avez vu que la transformée de Laplace prenait en argument une fonction et renvoyait une autre fonction. Sa bijectivité importe pour tous les calculs que vous faites.

3. De même, si on considère

$$S : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f \mapsto (x \mapsto f(x+1)) \end{array} \right.$$

cette fonction est bijective, et

$$S^{-1} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f \mapsto (x \mapsto f(x-1)) \end{array} \right. .$$

Proposition 51

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. Alors

(i) $\mathbb{1}_{E\setminus A} = 1 - A$

(ii) $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$

(iii) $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$

2 Relations binaires

Définition 52

Soit E un ensemble. Une relation binaire $\mathcal{R}$ est une correspondance $\mathcal{R} = (E, E, \Gamma)$.

Définition 53

Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. Soient x et y deux éléments de E. On dit que x est en relation avec y et on note $x\mathcal{R}y$.

Point de méthode 54

En pratique, pour définir une relation binaire sur un ensemble E, on dit

« On définit $\mathcal{R}$ sur E par : $\forall (x, y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \ldots .$ »

Exemple 55

Regardons plusieurs exemples, et essayons de les classer !

1. Sur $\mathbb{R}$,
- la relation d'égalité : on définit $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y.$$
- la relation d'infériorité : on définit $\mathcal{I}$ sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\mathcal{I}y \Leftrightarrow x \leqslant y.$$
- la relation de congruence modulo un réel : si $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la relation $\mathcal{C}_\alpha$ par
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\mathcal{C}_\alpha y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = y + k\alpha.$$
- une relation moins courante... On définit $\asymp$ sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \asymp y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

2. Sur $\mathbb{Z}$,
- la relation de divisibilité. On définit $|$ sur $\mathbb{Z}$ par :
$$\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2,\ m|n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ n = km.$$
- la relation de congruence modulo un entier naturel : comme pour les réels.

3. Si E est un ensemble, la relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$ est une relation binaire :
$$\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A,\ x \in B.$$

Exercice 56

Classer les différentes relations ci-dessus en deux catégories : discuter de leurs différences fondamentales.

2.1 Relations d'équivalence

Définition 57

Soit E un ensemble. Une relation d'équivalence $\sim$ sur E est une relation binaire sur E satisfaisant les trois propriétés suivantes :

(i) réflexivité : $\forall x \in E, x \sim x$.

(ii) symétrie : $\forall (x,y) \in E^2,\ (x \sim y) \Leftrightarrow (y \sim x)$.

(iii) transitivité : $\forall (x,y,z) \in E^3,\ [(x \sim y) \text{ et } (y \sim z)] \Rightarrow (x \sim z)$.

Exemple 58

1. La relation d'égalité est une relation d'équivalence .

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_\alpha$ la relation de congruence modulo un réel. Alors $\mathcal{C}_\alpha$ est une relation d'équivalence. Démontrons-le :

- **réflexivité.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $k = 0$. Alors $x = x + k\alpha$. Donc $x\mathcal{C}_\alpha x$.
- **symétrie.** Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x\mathcal{C}_\alpha y$.
  Alors on dispose de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + k\alpha$.
  Alors $y = a + (-k)\alpha$.
  Or, $-k \in \mathbb{Z}$ donc $y\mathcal{C}_\alpha x$ d'où la symétrie.
- **transitivité.** Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x\mathcal{C}_\alpha y$ et $y\mathcal{C}_\alpha z$. Alors on dispose de $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$ tels que
$$x = y + k\alpha \text{ et } y = z + \ell\alpha.$$
  Alors $x = z + k\alpha + \ell\alpha = z + (k + \ell)\alpha$. Comme $k + \ell \in \mathbb{Z}$, on a bien $x\mathcal{C}_\alpha z$. D'où la transitivité.

Donc $\mathcal{C}_\alpha$ est bien une relation d'équivalence.

3. Soient E et F deux ensembles, $f \in F^E$. On définit $\sim$ sur E par :
$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \sim y \Leftrightarrow f(x) \sim f(y).$$
$\sim$ définit bien une relation d'équivalence sur E.

4. (relation d'équipotence) Soit E un ensemble. On définit la relation $\sim$ sur $\mathcal{P}(E)$ par
$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ A \sim B \Leftrightarrow \exists f \in B^A, bijective.$$
Montrons que $\sim$ est une relation d'équivalence.

- réflexivité.
  Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Posons $f = \mathrm{Id}_A$. Alors $f \in A^A$ et f est bijective, donc $A \sim A$.
- symétrie.
  Soient $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \sim B$. Alors on dispose de $f \in B^A$, bijective. Donc $f^{-1} \in A^B$ et f^{-1} est bijective, donc $B \sim A$.
- transitivité.
  Soient $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$ tels que $A \sim B$ et $B \sim C$. Alors on dispose de $f \in B^A$ et de $g \in C^B$, toutes deux bijectives.
  Mais alors $g \circ f \in C^A$ et $g \circ f$ est bijective, donc $A \sim C$, d'où la transitivité.

Donc $\sim$ est une relation d'équivalence.

Exemple 59 (Un aparté culturel sur l'équipotence)

La relation d'équipotence est une manière de comparer les ensembles : deux ensembles sont équivalents s'ils sont en bijection.
Par exemple $\mathbb{R} \sim]-1, 1[$ via la bijection th.
On peut aussi montrer que

- $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$,
- $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$,
- mais $\mathbb{N} \not\sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \not\sim \mathbb{R}$.

Définition 60

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\sim$ et x un élément de E. On appelle classe d'équivalence modulo $\sim$ de x et on note $\overline{x}$ l'ensemble

$$\overline{x} = \{y \in E, y \sim x\}.$$

Exemple 61

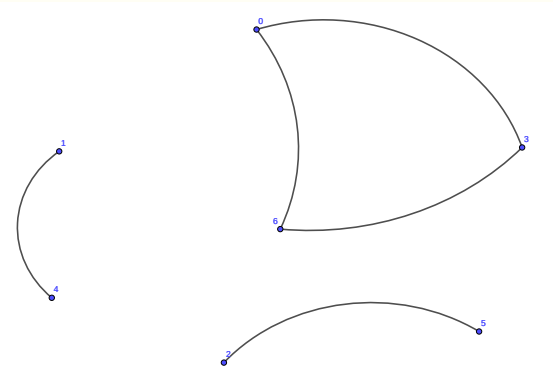
1. Sur $\mathbb{Z}$, avec la relation de congruence modulo 2, notée $\mathcal{C}_2$.

$$\begin{aligned}\overline{0} &= \{n \in \mathbb{Z},\ n\mathcal{C}_\alpha 0\}\\ &= \{n \in \mathbb{Z},\ \exists k \in \mathbb{Z},\ n = 0 + 2k\}\\ &= \{n \in \mathbb{Z},\ n \text{ est pair}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{1} &= \{n \in \mathbb{Z},\ z\mathcal{C}_\alpha 1\}\\ &= \{n \in \mathbb{Z},\ \exists k \in \mathbb{Z},\ = n1 + 2k\}\\ &= \{n \in \mathbb{Z},\ n \text{ est impair}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{2} &= \{n \in \mathbb{Z},\ n\mathcal{C}_\alpha 2\}\\ &= \{n \in \mathbb{Z},\ \exists k \in \mathbb{Z},\ n = 2 + 2k\}\\ &= \{n \in \mathbb{Z},\ n \text{ est pair}\}\end{aligned}$$

2. Sur $[\![0, 6]\!]$, dessinons les classes d'équivalence par la relation de congruence modulo 3.



3. Si $f : x \mapsto x^2$, si $\sim$ est définie pour tous x et y par $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$,

$$\begin{aligned}\overline{1} &= \{-1, 1\}\\ \overline{-2} &= \{-2, 2\}\\ \overline{0} &= \{0\}.\end{aligned}$$

Définition 62

Si A est une classe d'équivalence et $x \in A$, on dit que x est un représentant de A ($A = \overline{x}$).

Proposition 63

Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\sim$.

(i) $\forall (x, y) \in E^2$,

$$x \in \overline{y} \Leftrightarrow y \sim x \leftrightarrow x \sim y \leftrightarrow y \in \overline{x}.$$

(ii) $\forall (x, y) \in E^2$,

- ou bien $x \sim y$ et $\overline{x} = \overline{y}$,
- ou bien $x \not\sim y$ et $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$.

(iii) Les classes d'équivalence modulo $\sim$ forment une partition de E, i.e. si $(A_i)_{i \in \mathrm{I}}$ sont les classes d'équivalence distinctes de E, on a

- $\bigcup_{i \in \mathrm{I}} A_i = E$,
- $\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2$, $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.

Démonstration

On ne démontre que le second point. Soit $(x, y) \in E^2$.

- si $x \sim y$, on montre que $\overline{x} = \overline{y}$.

  $\boxed{\subset}$ Soit $z \in \overline{x}$. Alors $z \sim x$. Or, $y \sim x$ donc (symétrie) $x \sim y$ donc (transitivité) $z \sim y$. Donc $z \in \overline{y}$.

  $\boxed{\supset}$ De même on démontre que $\overline{y} \subset \overline{x}$.

  D'où l'égalité entre les deux ensembles.

- si $x \not\sim y$.
  Par l'absurde, si on avait $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \emptyset$, alors on disposerait de $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$.
  Donc $z \sim x$ et $z \sim y$ donc $y \sim z$, donc on aurait $y \sim x$, **absurde !**
  Donc $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$.

■

Exemple 64

Si on considère $\mathbb{Z}$ avec $\mathcal{C}_2$, on a deux classes d'équivalence (les entiers pairs et impairs) qui forment bien une partition de $\mathbb{Z}$.

Remarque 65 (Hors-programme)

Soit E un ensemble, $\sim$ une relation d'équivalence sur E.
On définit l'ensemble quotient $E/\sim$ comme l'ensemble des classes d'équivalences modulo $\sim$.

Si $(A_i)_{i\in \mathrm{I}}$ sont les classes d'équivaence modulo $\sim$ et si $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est une famille d'éléments de E tel que $\forall i \in \mathrm{I},\ A_i = \overline{x_i}$, alors $E/\sim$ est en bijection avec $\{x_i,\ i \in \mathrm{I}\}$.
Par exemple, sur $\mathbb{Z}$, pour la relation de congruence modulo n, $\mathcal{C}_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$,

$$\mathbb{Z}/\mathcal{C}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{p-1}\}.$$

Lorsque la structure des ensembles s'y prête bien, on peut même faire des opérations sur ces ensembles quotients : si $x = 5$,

$$\mathbb{Z}/\mathcal{C}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\},$$

et

$$\overline{3} + \overline{3} = \overline{6} = \overline{1}$$
$$\overline{2} \times \overline{4} = \overline{8} = \overline{3}.$$

Notation (spé MP) : on note en fait $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ cet ensemble.

2.2 Relations d'ordre

Définition 66

Soit E un ensemble.

1. Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur E est une relation binaire sur E satisfaisant les trois propriétés suivantes :
   (a) réflexivité : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
   (b) antisymétrie : $\forall (x, y) \in E^2,\ [(x\mathcal{R}y) \text{ et } (y\mathcal{R}x)] \Rightarrow (x = y)$.
   (c) transitivité : $\forall (x, y, z) \in E^3,\ [(x\mathcal{R}y) \text{ et } (y\mathcal{R}z)] \Rightarrow (x\mathcal{R}z)$.
2. L'ensemble E muni de $\mathcal{R}$ est appelé ensemble ordonné.
3. $\mathcal{R}$ est dite totale si
   $$\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y) \text{ ou } (y\mathcal{R}x).$$
   Sinon, la relation d'ordre est dite partielle.

Exemple 67 (Exemple fondamental)

La relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre totale.
En revanche, $<$ n'en est pas une (elle n'est pas réflexive).

Notation 68

On notera souvent les relations d'ordre avec des symboles ressemblant au symbole $\leqslant$, comme

$$\preceq, \preccurlyeq, \leqq, \lesssim, \lessapprox, \dots$$

et on aura tendance, si on écrit par exemple $x \preccurlyeq y$, à dire « x est inférieur à y » : c'est un abus de langage, on devrait dire « x est en relation avec y » .

Exemple 69

(i) Les relations d'ordre sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ sont des relations d'ordres et elles sont totales.

(ii) Sur $\mathbb{N}$, la relation $|$ de divisibilité :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ \ m|n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ \ n = km$$

est une relation d'ordre : vérifions-le.

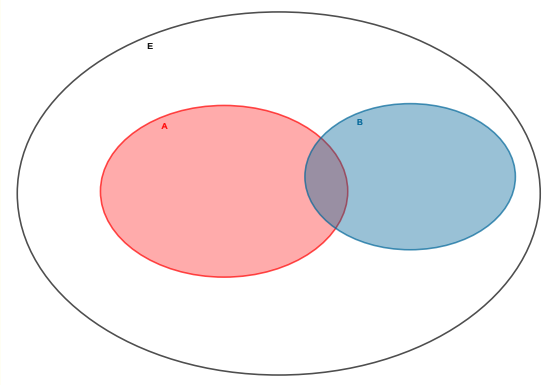
- Réflexivité.
  Soit $m \in \mathbb{N}$. Posons $k = 1$. Alors $m = km$, donc $m|m$.
- Antisymétrie.
  Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $m|n$ et $n|m$. Alors on dispose de $k \in \mathbb{N}$ et de $\ell \in \mathbb{N}$ tels que $n = km$ et $m = \ell n$. Alors
  $$n = k\ell n.$$
  — si $n = 0$, alors $m = \ell n = 0$, donc $m = n = 0$. De même si $m = 0$.
  — sinon, l'équation $n = k\ell n$ nous donne alors $1 = k\ell$ donc, comme k et ℓ sont deux entiers naturels, $k = \ell = 1$.
  Donc $n = m$.

  D'où l'antisymétrie.
- Transitivité.
  Soient $(m,n,p) \in \mathbb{N}^2$ tels que $m|n$ et $n|p$.
  Alors on dispose de $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = km$ et $p = \ell n$. Alors $p = (k\ell)m$, donc $m|p$.
  D'où la transitivité.

Donc $|$ est une relation d'ordre. **En revanche,**

- $|$ n'est pas totale, car, par exemple, 3 ne divise pas 5 et 5 ne divise pas 3,
- $|$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$ car $1|-1$ et $-1|1$ sans pour autant que $1 = -1$.

(iii) Si E est un ensemble, la relation d'inclusion est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$. Elle n'est pas totale : dans l'exemple suivant, on n'a ni $A \subset B$, ni $B \subset A$.



(iv) L'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^2$.

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,\ (x,y) \preccurlyeq (x',y') \Leftrightarrow [(x < x') \text{ ou } ((x = x') \text{ et } (y \leqslant y'))].$$

Cette relation d'ordre est une relation d'ordre totale (exercice !).
Il s'agit de l'ordre du dictionnaire !

Exercice 70

Je suis une relation d'ordre et d'équivalence. Qui suis-je ?

Définition 71

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

(i) un élément M de E est appelé majorant de A si

$$\forall x \in A, x \preccurlyeq M.$$

Si A admet un majorant, elle est dite majorée.

(ii) un élément m de E est appelé minorant de A si

$$\forall x \in A, m \preccurlyeq x.$$

Si A admet un minorant, elle est dite minorée.

(iii) si A admet un majorant et un minorant, elle est dite bornée.

Exemple 72

1. Sur $(\mathbb{R}, \leqslant)$. Si $A = \left\{ \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

- 0 est un minorant de A,
- -1 est un minorant de A,

- -453425 est un minorant de A.

Un minorant/majorant n'est pas unique !

2. Sur $(\mathbb{N}, |)$, si $A = \{12, 15\}$,
- 60 est un majorant de A ($12|60$ et $15|60$)
- 120 est un majorant de A
- 0 est un majorant de A... (ce qui fait que souvent, on va considérer la relation de divisibilité sur $\mathbb{N}^*$ plutôt que sur $\mathbb{N}$).

De même,
- 1 est un minorant de A,
- 3 est un minorant de A.

3. Sur $(\mathcal{P}(E), \subset)$, si $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$, E est un majorant de $\mathcal{A}$ et $\emptyset$ un minorant de $\mathcal{A}$.

Définition 73

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

(i) Un plus grand élément de A est un majorant de A appartenant à A.

(ii) Un plus petit élément de A est un minorant de A appartenant à A.

Proposition 74

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E. Le plus grand (resp. le plus petit) élément de A, s'il existe, est unique. On les appelle alors restpectivement le maximum et le minimum de A et on les note $\max(A)$ et $\min(A)$.

Démonstration

Soient M et M' deux plus grands éléments de A. Alors
- $\underbrace{(\forall a \in A,\ a \preccurlyeq M)}_{(1)}$ et $\underbrace{(M \in A)}_{(2)}$,
- $\underbrace{(\forall a \in A,\ a \preccurlyeq M')}_{(3)}$ et $\underbrace{(M' \in A)}_{(4)}$,

Mais par (4), $M' \in A$, donc par (1), $M' \preccurlyeq M$. Par (2), $M \in A$ et par (3), $M \preccurlyeq M'$.
Donc, par antisymétrie, $M = M'$.
On fait de même pour les plus petits éléments. ■

Exemple 75

1. Sur $(\mathbb{R}, \leqslant)$. Si $A = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$:
- A admet un plus grand élément, 1.

- en revanche, A n'admet pas de plus petit élément. En effet, supposons que A admette un plus petit élément. Alors on disposerait de n_0 dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n_0} = \min(A)$. Mais alors $\frac{1}{n_0+1} \in A$ et $\frac{1}{n_0+1} < \frac{1}{n_0}$, absurde !

2. Dans $(\mathbb{N}, |)$, $A = \{12, 15\}$ n'admet ni plus grand, ni plus petit élément.

3. En revanche, dans $(\mathbb{N}, \leqslant)$, on a la propriété suivante :

Proposition 76

1. Toute partie de $\mathbb{N}$ non vide admet un plus petit élément.

2. Toute partie majorée non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

3. Toute partie majorée (resp. minorée) non vide de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément (resp. un plus petit élément).

On remarque que dans dans l'exemple $A = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$, A n'a pas de plus petit élément, mais 0 a un statut particulier : c'est ce qu'on appellera la borne inférieure de A.

Définition 77 (Borne supérieure, borne inférieure)

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

(i) Soit B l'ensemble des majorants de A. Si B a un plus petit élément, on nomme cet élément borne supérieure de A et on le note $\sup(A)$.

(ii) Soit C l'ensemble des minorants de A. Si C a un plus grand élément, on nomme cet élément borne inférieure de A et on le note $\inf(A)$.

Exemple 78

1. Sur $(\mathbb{R}, \leqslant)$. Si $A = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$. A n'a pas de plus petit élément. Mais si B est l'ensemble des minorants de A,

$$B = \{x \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathscr{A},\ x \leqslant a\} = \left\{x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x \leqslant \frac{1}{n}\right\}.$$

Montrons que $B = \mathbb{R}_-$.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in B$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x \leqslant \frac{1}{n}$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$, donc $x \leqslant 0$. Donc $x \in \mathbb{R}_-$.

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in \mathbb{R}_-$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \geqslant 0 \geqslant x$. Donc $x \in B$.

D'où l'égalité.
Donc $\inf(A) = \max(\mathbb{R}_-) = 0$.

2. Le sup et l'inf n'existent pas forcément. Ainsi, dans $(\mathbb{Q}, \leqslant)$, si

$$A = \{x \in \mathbb{Q},\ x^2 \leqslant 2\},$$

alors A n'a pas de borne supérieure **dans** $\mathbb{Q}$.
(avec les mains, s'il y avait une borne supérieure s de A, on aurait $s^2 = 2$ donc $s = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

3. Dans $(\mathbb{N}^*, |)$, si $A = \{6, 10, 14\}$, l'ensemble des minorants de A est

$$B = \{n \in \mathbb{N},\ n|6,\ n|10,\ n|14\} = \{1, 2\}$$

B a un plus grand élément (pour $|$), c'est 2. Donc A admet une borne inférieure, c'est 2.

Proposition 79

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné, $A \subset E$.

1. Si A admet un plus petit élément, alors A admet une borne inférieure et $\inf(A) = \min(A)$.

2. Si A admet un plus grand élément, alors A admet une borne supérieure et $\sup(A) = \max(A)$.

Remarque 80

Pour démontrer la propriété précédente, reformulons, si $m \in E$,

- $m = \inf(A)$:

$$\underbrace{(\forall a \in A,\ m \preccurlyeq a)}_{m \text{ est un minorant de } A\ldots} \text{ et } \underbrace{\Big(\forall x \in E,\ (\forall a \in A,\ x \preccurlyeq a) \Rightarrow x \preccurlyeq m\Big)}_{\ldots\text{et c'est le plus grand}}$$

- $m = \sup(A)$:

$$\underbrace{(\forall a \in A,\ a \preccurlyeq m)}_{m \text{ est un majorant de } A\ldots} \text{ et } \underbrace{\Big(\forall x \in E,\ (\forall a \in A,\ a \preccurlyeq x) \Rightarrow m \preccurlyeq x\Big)}_{\ldots\text{et c'est le plus petit}}$$

Point de méthode 81

Pour montrer que $m = \inf(A)$.

- Soit $a \in A$. Montrons que $m \preccurlyeq a$.
- Soit $x \in E$ un minorant de A. Montrons que $x \preccurlyeq m$.

Démonstration (Prevue de la proposition précédente)

On suppose que A admet un plus petit élément m.
Montrons que $m = \inf(A)$.

- $m = \min(A)$ donc m est un minorant de A.
- soit $x \in E$ tel que x est un minorant de A. Or, $m \in A$ donc $x \preccurlyeq m$.

Donc $m = \inf(A)$.
On fait de même avec le sup. ■

Proposition 82 (de la borne supérieure)

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Corollaire 83

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Démonstration

Deux démonstrations de ce corollaire, l'une qui est vraie dans un cadre très général, l'autre liée à la structure de $\mathbb{R}$.

1. Preuve générale.
   Soit A une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$.
   Notons B l'ensemble des minorants de A. Alors
   - B est non vide car A est minorée (donc possède un minorant)
   - B est majorée car A possède au moins un élément a et $\forall b \in B,\ b \leqslant a$.

   Donc, par la propriété de la borne supérieure, B admet une borne supérieure m.
   Démontrons que $m = \inf(A)$.
   - Soit $a \in A$. Alors a est un majorant de B, donc, comme $m = \sup(B)$, $m \leqslant a$.
     Donc m est un minorant de A.
   - Soit M un autre minorant de A. Alors $M \in B$, mais $m = \sup(B)$ donc $M \leqslant m$.
     Donc m est le plus grand des minorants de A.

   Donc A admet bien une borne inférieure !
2. Preuve utilisant la structure de $\mathbb{R}$.
   Soit A une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$.
   Considérons $B = \{-x, x \in A\}$. Alors
   - B est non vide.
   - si m est un minorant de A, alors pour tout x de A, $m \leqslant x$ donc pour tout x de A, $-x \leqslant -m$, donc B est majorée par $-m$.

   Donc B admet une borne supérieure s. Démontrons que $-s = \inf(A)$.
   - déjà, pour tout y de B, $y \leqslant s$.
     Donc, pour tout x de A, $-x \leqslant s$, i.e. $-s \leqslant x$, donc $-s$ est un minorant de A.

- soit t un autre minorant de A. Alors $-t$ est un majorant de B, donc, comme s est la borne supérieure de B, $s \leqslant -t$, donc $t \leqslant -s$, donc $-s$ est bien le plus grand des minorants de A.

Donc A admet une borne inférieure.

■

Définition 84

1. Soient $(E, \preccurlyeq)$ et $(F, \lesssim)$ deux ensembles ordonnés, $f \in F^E$.

- on dit que f est croissante sur E si

$$\forall (x, x') \in E,\ (x \preccurlyeq x') \Rightarrow (f(x) \lesssim f(x'))$$

- on dit que f est décroissante sur E si

$$\forall (x, x') \in E,\ (x \preccurlyeq x') \Rightarrow (f(x') \lesssim f(x))$$

2. Soit E un ensemble quelconque, $(F, \lesssim)$ un ensemble ordonné, $f \in F^E$. Soit

$$A = \{f(x), x \in E\} = f(E).$$

- si $\min(A)$ existe, on le note $\min\limits_{x \in E} f(x)$,
- si $\max(A)$ existe, on le note $\max\limits_{x \in E} f(x)$,
- si $\inf(A)$ existe, on le note $\inf\limits_{x \in E} f(x)$,
- si $\sup(A)$ existe, on le note $\sup\limits_{x \in E} f(x)$.

Exemple 85

Ainsi, l'application

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathcal{P}(R) \\ n \mapsto \left[-\frac{n}{2}, n\right] \end{array} \right.$$

est croissante de $(\mathbb{N}, \leqslant)$ dans $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \subset)$.

3 Nombres réels

Nous n'allons pas construire les nombres réels, qui sont beaucoup plus difficiles à construire que les nombres complexes. Nous allons commencer le cours par une proposition, non pas par une définition. C'est la propriété importante des nombres réelles, qui n'est pas démontrable puisque elle dépend de la construction de $\mathbb{R}$.

Remarque 86 (Rappels sur les calculs dans les réels et les relations d'ordre)

- $\forall x \in \mathbb{R},\ -|x| \leqslant x \leqslant |x|$,
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall a > 0$,
$$|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$$
et
$$|x| \geqslant a \Leftrightarrow x \geqslant a \text{ ou } x \leqslant -a,$$
- pour tout réel x,
$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \text{ ou } x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$
- $\forall \varepsilon > 0,\ 0 < \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$,
- si $A \subset \mathbb{R}$,
  - A est majorée ssi $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \leqslant M$,
  - A est minorée ssi $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ m \leqslant x$,
  - A est bornée ssi $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in A,\ m \leqslant x \leqslant M$,

  si $a \in \mathbb{R}$,
  - $a = \min(A) \Leftrightarrow a \in A$ et $\forall x \in A,\ a \leqslant x$,
  - $a = \max(A) \Leftrightarrow a \in A$ et $\forall x \in A,\ x \leqslant a$,
  - $a = \inf(A) \Leftrightarrow a$ est un minorant de A et $\forall b$ minorant de $A,\ a \geqslant b$.
  - $a = \sup(A) \Leftrightarrow a$ est un majorant de A et $\forall b$ majorant de $A,\ a \leqslant b$.

Proposition 87

Soit $A \subset \mathbb{R}$, soit $B = \{|x|, x \in A\}$. Alors A est bornée si et seulement si B est majorée.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ Si A est borné, on dispose de $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tels que
$$\forall x \in A,\ m \leqslant x \leqslant M.$$
Posons $S = \max(|M|, |m|)$. Alors
- $S \geqslant |m| \geqslant -m$, donc $-S \leqslant m$,
- $S \geqslant |M| \geqslant M$.

En particulier $S \geqslant 0$. Et, pour tout x de A,
$$-s \leqslant m \leqslant x \leqslant M \leqslant S,$$
i.e. pour tout x dans A, $|x| \leqslant S$.
Donc, pour tout y dans B, $y \leqslant S$. Donc B est majorée.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si B est majorée, on dispose de $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in B,\ y \leqslant M$. Donc, pour tout x dans A, $|x| \leqslant M$, donc
$$\forall x \in A,\ -M \leqslant x \leqslant M,$$

donc A est bornée.

■

Proposition 88 (Borne supérieure)

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Corollaire 89

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Démonstration

Les deux démonstrations sont à revoir à l'occasion ! ■

Proposition 90 (Une définition alternative de la borne supérieure)

Soit $A \subset \mathbb{R}$, non vide. Soit $M \in \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. $M = \sup(A)$,
2. $\forall x \in A,\ x \leqslant M \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ M - \varepsilon \leqslant a \leqslant M$,
3. $\forall x \in A,\ x \leqslant M \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ |M - a| \leqslant \varepsilon$.

Remarque 91

Les deux dernières propositions sont presque les mêmes, le résultat important est l'équivalence $(i) \Leftrightarrow (ii)$.

Démonstration

On va démontrer (i)⇔(ii) et (ii)⇔(iii) (pour bien mettre en avant le fait que c'est la première implication qui est fondamentale.

- (i)⇒(ii) Supposons que $M = \sup(A)$.
  . Déjà, M majore A.
  . Ensuite, soit $\varepsilon > 0$. Si on avait

$$\forall x \in A,\ M - \varepsilon > x,$$

  alors $M - \varepsilon$ serait un majorant de A strictement supérieur à M, absurde ! Donc on dispose de $a \in A$ tel que $M - \varepsilon \leqslant a$.
  Mais $a \in A$ donc $a \leqslant M$, donc, finalement,

$$M - \varepsilon \leqslant a \leqslant M.$$

- (ii)⇒(i) Supposons (ii).
  . Déjà, M est un majorant de A car $\forall x \in A,\ x \leqslant M$.
  . Ensuite, soit N un autre majorant de A. Si on avait $N < M$, alors en notant $\varepsilon = \dfrac{M-N}{2}$,

$$\varepsilon > 0 \text{ et } N = M - 2\varepsilon < M - \varepsilon.$$

  Mais alors, par (ii), on dispose de $x \in A$ tel que $M - \varepsilon \leqslant x$, donc $N < x$, absurde !
  Donc $N \geqslant M$.
  Donc M est bien la borne supérieure de A.

Démontrons alors l'autre équivalence.

- (ii)⇒(iii) Supposons (ii).
  . Déjà, M est un majorant de A donc on a bien $\forall x \in A,\ x \leqslant M$.
  . Ensuite, soit $\varepsilon > 0$. Alors on dispose de $x \in A$ tel que

$$M - \varepsilon \leqslant x \leqslant M \leqslant M + \varepsilon,$$

  donc $|x - M| \leqslant \varepsilon$.

- (iii)⇒(ii) Supposons (iii).
  . Déjà, M est un majorant de A donc on a bien $\forall x \in A,\ x \leqslant M$.
  . Ensuite, soit $\varepsilon > 0$. Alors on dispose de $x \in A$ tel que $|x - M| \leqslant \varepsilon$. Alors

$$M - \varepsilon \leqslant x \leqslant M + \varepsilon,$$

  Mais M majore A donc $x \leqslant M$. D'où (ii).

■

Proposition 92 (Une définition alternative de la borne inférieure)

Soit $A \subset \mathbb{R}$, non vide. Soit $m \in \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. $m = \inf(A)$,
2. $\forall x \in A,\ x \leqslant m \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ m - \varepsilon \leqslant a \leqslant m$,
3. $\forall x \in A,\ x \leqslant m \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A,\ |m - a| \leqslant \varepsilon$.

Exemple 93

Soit $A = \left\{ \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Démontrons que $0 = \inf(A)$.
Déjà, pour tout a dans A, $0 \leqslant A$.
Ensuite, soit $\varepsilon > 0$.

...au brouillon...

On cherche n tel que $\dfrac{1}{n} \geqslant \varepsilon$, i.e. $n \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Posons $n = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. Alors $n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$ donc $0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$.
Donc $0 = \inf(A)$.

On rappelle que l'on a vu 9 types d'intervalles dans $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R},\ ]-\infty, b],\ ]-\infty, b[,\ [a, +\infty[,\ ]a, +\infty[,\ ]a, b[,\ ]a, b],\ [a, b[,\ [a, b].$$

Définition 94

Un ensemble I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement s'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2,\ (x \leqslant y) \Rightarrow ([x, y] \subset \mathrm{I}).$$

Remarque 95

Cela veut dire que l'ensemble est « sans trou ».

Proposition 96 (Précision de la proposition précédente)

Soit I une partie $\mathbb{R}$, non vide, vérifiant $\forall (x, y) \in \mathrm{I}^2,\ (x \leqslant y) \Rightarrow ([x, y] \subset \mathrm{I})$.

1. si I n'est ni majoré, ni minoré, alors $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.
2. si I est majoré, non minoré, soit $b = \sup(\mathrm{I})$
   - si $b \in \mathrm{I}$, $\mathrm{I} =]-\infty, b]$,
   - si $b \notin \mathrm{I}$, $\mathrm{I} =]-\infty, b[$.
3. si I est minoré, non majoré, soit $a = \inf(\mathrm{I})$,
   - si $a \in \mathrm{I}$, $\mathrm{I} = [a, +\infty[$,
   - si $a \notin \mathrm{I}$, $\mathrm{I} =]a, +\infty[$.
4. si I est borné, soit $a = \inf(\mathrm{I})$ et $b = \sup(\mathrm{I})$.
   - si $a \in \mathrm{I}$ et $b \in \mathrm{I}$, $\mathrm{I} = [a, b]$,
   - si $a \notin \mathrm{I}$ et $b \in \mathrm{I}$, $\mathrm{I} =]a, b]$,
   - si $a \in \mathrm{I}$ et $b \notin \mathrm{I}$, $\mathrm{I} = [a, b[$,
   - si $a \notin \mathrm{I}$ et $b \notin \mathrm{I}$, $\mathrm{I} =]a, b[$.

Démonstration

1. si I n'est ni majoré, ni minoré, démontrons que $\mathrm{I} = \mathbb{R}$. Déjà, I est clairement inclus dans $\mathbb{R}$.
   Ensuite, soit $x \in \mathbb{R}$. Comme I n'est pas majoré ni minoré par x, on dispose de $\alpha \in \mathrm{I}$ tel que $\alpha \leqslant x$ et de $\beta \in \mathrm{I}$ tel que $x \leqslant \beta$.
   Mais comme I est un intervalle, $[\alpha, \beta] \subset \mathrm{I}$, donc $x \in \mathrm{I}$.
   Donc, par double inclusion, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

2. si I est majoré, non minoré, soit $b = \sup(\mathrm{I})$

- si $b \in \mathrm{I}$, montrons que $\mathrm{I} =]-\infty, b]$.
  - — déjà, pour tout x dans I, $x \leqslant b$, donc $\mathrm{I} \subset]-\infty, b]$.
  - — ensuite, soit $x \in]-\infty, b]$. Alors comme I n'est pas minoré, on dispose de $\alpha \in \mathrm{I}$ tel que $\alpha \leqslant x$. Mais comme α et b sont dans I, $[\alpha, b] \subset \mathrm{I}$, donc $x \in \mathrm{I}$.

  Donc, par double inclusion, $\mathrm{I} =]-\infty, b]$.
- si $b \notin \mathrm{I}$, montrons que $\mathrm{I} =]-\infty, b[$.
  - — déjà, pour tout x dans I, $x \leqslant b$, et $x \neq b$ car $b \notin \mathrm{I}$, donc $x < b$, donc $\mathrm{I} \subset]-\infty, b[$.
  - — ensuite, soit $x \in]-\infty, b[$.
    Alors comme I n'est pas minoré, on dispose de $\alpha \in \mathrm{I}$ tel que $\alpha \leqslant x$.
    De plus, si l'on note $\varepsilon = b - x$, par définition de $b = \sup(\mathrm{I})$, on dispose de $\beta \in \mathrm{I}$ tel que $b - \varepsilon \leqslant \beta \leqslant b$, i.e. $x \leqslant \beta$.
    Mais comme α et β sont dans I, $[\alpha, \beta] \subset \mathrm{I}$, donc $x \in \mathrm{I}$.

  Donc, par double inclusion, $\mathrm{I} =]-\infty, b[$.

3. si I est minoré, non majoré, soit $a = \inf(\mathrm{I})$,

- si $a \in \mathrm{I}$, montrons que $\mathrm{I} = [a, +\infty[$,
  - — déjà, pour tout x dans I, $x \geqslant a$, donc $\mathrm{I} \subset [a, +\infty[$.
  - — ensuite, soit $x \in [a, +\infty[$. Alors comme I n'est pas majoré, on dispose de $\beta \in \mathrm{I}$ tel que $\beta \geqslant x$. Mais comme a et β sont dans I, $[a, \beta] \subset \mathrm{I}$, donc $x \in \mathrm{I}$.

  Donc, par double inclusion, $\mathrm{I} = [a, +\infty[$.
- si $a \notin \mathrm{I}$, montrons que $\mathrm{I} =]a, +\infty[$.
  - — déjà, pour tout x dans I, $x \geqslant a$, et $x \neq a$ car $a \notin \mathrm{I}$, donc $x > a$, donc $\mathrm{I} \subset]a, +\infty[$.
  - — ensuite, soit $x \in]a, +\infty[$.
    Alors comme I n'est pas majoré, on dispose de $\beta \in \mathrm{I}$ tel que $\beta \geqslant x$.
    De plus, si l'on note $\varepsilon = x - a$, par définition de $a = \inf(\mathrm{I})$, on dispose de $\alpha \in \mathrm{I}$ tel que $a \leqslant \alpha \leqslant a + \varepsilon$, i.e. $\alpha \leqslant x$.
    Mais comme α et β sont dans I, $[\alpha, \beta] \subset \mathrm{I}$, donc $x \in \mathrm{I}$.

  Donc, par double inclusion, $\mathrm{I} =]a, +\infty[$.

4. si I est borné, soit $a = \inf(\mathrm{I})$ et $b = \sup(\mathrm{I})$.

- si $a \in \mathrm{I}$ et $b \in \mathrm{I}$,
  - — déjà, par définition d'un intervalle, $[a, b] \subset \mathrm{I}$.
  - — mais comme I est minoré par a et majoré par b, $\mathrm{I} \subset [a, b]$.

  Donc $\mathrm{I} = [a, b]$
- si $a \notin \mathrm{I}$ et $b \in \mathrm{I}$, $\mathrm{I} =]a, b]$,
  - — Déjà, pour tout x dans I, $a < x \leqslant b$ car a minore I mais $a \notin \mathrm{I}$, et b majore I.
  - — Ensuite, si $x \in]a, b]$, si l'on note $\varepsilon = x - a$, par définition de $a = \inf(\mathrm{I})$, on dispose de $\alpha \in \mathrm{I}$ tel que $a \leqslant \alpha \leqslant a + \varepsilon$, i.e. $\alpha \leqslant x$.
    Donc $\alpha \leqslant x \leqslant b$. Comme I est un intervalle, $[\alpha, b] \subset \mathrm{I}$, donc $x \in \mathrm{I}$.

  D'où, par double inclusion, $\mathrm{I} =]a, b]$.

- si $a \in \mathrm{I}$ et $b \notin \mathrm{I}$, $\mathrm{I} = [a, b[$,
  - Déjà, pour tout x dans I, $a \leqslant x < b$ car b majore I mais $b \notin \mathrm{I}$, et a minore I.
  - Ensuite, si $x \in]a, b]$, si l'on note $\varepsilon = b - x$, par définition de $b = \sup(\mathrm{I})$, on dispose de $\beta \in \mathrm{I}$ tel que $b - \varepsilon \leqslant \beta \leqslant b$, i.e. $x \leqslant \beta$.
    Donc $a \leqslant x \leqslant \beta$. Comme I est un intervalle, $[a, \beta] \subset \mathrm{I}$, donc $x \in \mathrm{I}$.

  D'où $\mathrm{I} = [a, b[$ par double inclusion.
- si $a \notin \mathrm{I}$ et $b \notin \mathrm{I}$, $\mathrm{I} =]a, b[$.
  - Déjà, pour tout x dans I, $a < x < b$ car a minore I mais $a \notin \mathrm{I}$, et b majore I mais $b \notin \mathrm{I}$.
  - Ensuite, soit $x \in]a, b[$.
    Si l'on note $\varepsilon = x - a$, par définition de $a = \inf(\mathrm{I})$, on dispose de $\alpha \in \mathrm{I}$ tel que $a \leqslant \alpha \leqslant a + \varepsilon$, i.e. $\alpha \leqslant x$.
    Si l'on note $\varepsilon' = b - x$, par définition de $b = \sup(\mathrm{I})$, on dispose de $\beta \in \mathrm{I}$ tel que $b - \varepsilon' \leqslant \beta \leqslant b$, i.e. $x \leqslant \beta$.
    Donc $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$. Comme I est un intervalle, $[\alpha, \beta] \subset \mathrm{I}$, donc $x \in \mathrm{I}$.

■

Définition 97

On appelle intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tout intervalle d'une des formes suivantes

$$\mathbb{R},\ ]-\infty, b[,\ ]a, +\infty[,\ ]a, b[.$$

Proposition 98 (Une propriété des intervalles ouverts)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Alors

$$\forall x \in \mathrm{I},\ \exists \eta > 0,\ [x - \eta, x + \eta] \subset \mathrm{I}.$$

Démonstration

- si $\mathrm{I} = \mathbb{R}$, c'est évident.
- si $\mathrm{I} =]-\infty, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$, soit $x \in \mathrm{I}$. Notons $\varepsilon = b - x$. Alors en posant $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, $x + \eta < x + \varepsilon = b$, donc $[x - \eta, x + \eta] \subset \mathrm{I}$.
- si $\mathrm{I} =]a, +\infty[$, avec $a \in \mathbb{R}$, soit $x \in \mathrm{I}$. Notons $\varepsilon = x - a > 0$. Alors, en posant $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, $a = x - \varepsilon < x - \eta$, donc $[x - \eta, x + \eta] \subset \mathrm{I}$.
- si $\mathrm{I} =]a, b[$, soit $x \in \mathrm{I}$.
  Notons $\varepsilon = x - a > 0$ et $\varepsilon' = b - x > 0$.
  Posons $\eta = \dfrac{1}{2}\min(\varepsilon, \varepsilon')$. Alors

$$a = x - \varepsilon < x - \eta \text{ et } x + \eta < x + \varepsilon = b.$$

Donc $[x-\eta, x+\eta] \subset \mathrm{I}$.

■

Proposition 99

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. Pour tout intervalle I non vide de $\mathbb{R}$ ouvert, $\mathrm{I} \cap A \neq \emptyset$.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ |x-a| \leqslant \varepsilon$.

Définition 100

Lorsque l'une des propositions précédentes est vérifiée, on dit que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose la première proposition. Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $\varepsilon > 0$.
Notons $\mathrm{I} =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$.
$\mathrm{I} \neq \emptyset$ donc, par 1., $\mathrm{I} \cap A \neq \emptyset$, donc on dispose de $a \in A$ tel que $a \in \mathrm{I}$, i.e.

$$x - \varepsilon < a < x + \varepsilon.$$

Donc $|a-x| < \varepsilon$ donc $|a-x| \leqslant \varepsilon$, d'où 2.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose 2.
Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathrm{I}$. On dispose de $\eta > 0$ tel que $[x-\eta, x+\eta] \subset \mathrm{I}$.
Par 2., on dispose de $a \in A$ tel que $|x-a| \leqslant \eta$.
Mais alors $a \in [x-\eta, x+\eta] \subset \mathrm{I}$, donc $a \in \mathrm{I}$.
Donc $\mathrm{I} \cap A \neq \emptyset$.

■

Notre but est alors de démontrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Définition 101

Un nombre réel d est dit décimal s'il existe n dans $\mathbb{N}$ tel que $10^n d$ soit entier. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des décimaux :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{p}{10^n},\ p \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si $x \in \mathbb{R}$, l'approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près est la quantité $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

Exemple 102

Proposition 103

Les nombres rationnels, ainsi que les nombres irrationnels, sont denses dans $\mathbb{R}$.

Pour démontrer cette propriété, on va avoir besoin de deux lemmes.

Lemme 104

Soit $x \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$. Alors $10^n x - 1 \leqslant \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x$,
donc $x - \dfrac{1}{10^n} \leqslant \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leqslant x$,
donc $-\dfrac{1}{10^n} \leqslant \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leqslant x$,
Donc

$$\left| x - \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \right| \leqslant \frac{1}{10^n}.$$

Démonstration

La preuve est déjà dans l'énoncé ! ■

Lemme 105

Soit $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors

- $a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
- si $a \neq 0$, $ab \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Démonstration

Notons $c = a + b$ et $d = ab$.

- si c était dans $\mathbb{Q}$, alors $b = c - a$ serait dans $\mathbb{Q}$, absurde !
- si d était dans $\mathbb{Q}$ et $a \neq 0$, alors $b = \dfrac{d}{a}$ serait dans $\mathbb{Q}$, absurde !

■

Passons alors à la démonstration de la proposition.

Démonstration

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.

...au brouillon...

On va utiliser l'approximation décimale : on sait que

$$\left|x - \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}\right| \leqslant \frac{1}{10^n}$$

On veut donc avoir $\frac{1}{10^n} \leqslant \varepsilon$, i.e. $n \geqslant \log_{10}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Posons $n = \lfloor -\log_{10}(\varepsilon) \rfloor + 1$. Alors $n \geqslant -\log_{10}(\varepsilon)$, donc $10^n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, donc $10^{-n} \leqslant \varepsilon$.
Notons $q = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$. Alors $q \in \mathbb{Q}$ et

$$|x - q| \leqslant \frac{1}{10^n} \leqslant \varepsilon.$$

Donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$

- si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on pose $y = x$. Alors $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $|x - y| = 0 \leqslant \varepsilon$.
- si $x \in \mathbb{Q}$,

...au brouillon...

Idée : $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On va ajouter $\frac{\sqrt{2}}{n}$ à x, avec n assez grand, de sorte que $\frac{\sqrt{2}}{n} \leqslant \varepsilon$, i.e. $n \geqslant \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$.

Posons $n = \left\lfloor \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. Alors $n \geqslant \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$, i.e. $\frac{\sqrt{2}}{n} \leqslant \varepsilon$.
Posons $y = x + \frac{\sqrt{2}}{n}$. Alors $\frac{\sqrt{2}}{n} \notin \mathbb{Q}$ et donc $y \notin \mathbb{Q}$, et

$$|y - x| = \frac{\sqrt{2}}{n} \leqslant \varepsilon.$$

Donc $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

■

Remarque 106

Remarquons que l'on a en fait démontré que $\mathbb{D}$ était dense dans $\mathbb{R}$. Mais on a la propriété (simple à démontrer) suivante : si $A \subset B$ et A est dense dans $\mathbb{R}$, B est dense dans $\mathbb{R}$.