 nlaillet.math@gmail.com

# Chapitre 6
# Décomposition en éléments simples

Ce petit document est là pour vous expliquer comment réussir à écrire une fraction comme à la page 7 du poly d'intégrales. On cherche par exemple à écrire

$$\frac{1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}.$$

Je propose deux méthodes :

- la méthode « bourrine-mais-qui-marche-quand-même » : on met tout au même dénominateur et on regarde les termes de chaque degré du numérateur.

$$\begin{aligned}\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2} &= \frac{a(x+1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x+1)}{x(x+1)(x-2)}\\ &= \frac{ax^2 - ax - 2a + bx^2 - 2bx + cx^2 + cx}{x(x+1)(x-2)}\\ &= \frac{(a+b+c)x^2 + (-a-2b+c)x - 2a}{x(x+1)(x-2)}.\end{aligned}$$

  On veut que pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$, $(a+b+c)x^2+(-a-2b+c)x-2a = 1$. Il faut donc annuler les termes de degré 2 et 1, i.e. $a+b+c = 0$ et $-a-2b+c = 0$ et il faut que $-2a = 1$. Ainsi, $a = -\frac{1}{2}$ et on a les système

$$\begin{cases} b + c = \frac{1}{2} \\ -2b + c = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

  En résolvant le système, on trouve que $c = \frac{1}{6}$ et $b = \frac{1}{3}$. Ainsi,

$$\frac{1}{x(x+1)(x-2)} = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{3(x+1)} + \frac{1}{6(x-2)}.$$

- la méthode élégante. Pour déterminer le coefficient devant $\frac{1}{x-\omega}$, on multiplie l'égalité par $x-\omega$ et on évalue en $\omega$. Ici, on part de

$$\frac{1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}. \tag{1}$$

  — pour déterminer $a$, on multiplie (1) par $x$ :

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = a + \frac{bx}{x+1} + \frac{cx}{x-2}$$

  et on évalue en 0 :

$$\frac{1}{(0+1)(0-2)} = a + 0 + 0, \text{ i.e. } -\frac{1}{2} = a.$$

— pour déterminer $b$, on multiplie (1) par $x+1$ :

$$\frac{1}{x(x-2)} = \frac{a(x+1)}{x} + b + \frac{c(x+1)}{x-2}$$

et on évalue en $-1$ :

$$\frac{1}{3} = 0 + b + 0$$

— pour déterminer $c$, on multiplie (1) par $x-2$ :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a(x-2)}{x} + \frac{b(x-2)}{x+1} + c$$

et on évalue en 2 :

$$\frac{1}{6} = 0 + 0 + c$$

**Remarque.** On peut utiliser la même méthode si la fraction n'est pas en $\dfrac{1}{(x-\dots)(x-\dots)\dots}$ mais si on a au numérateur un polynôme de degré strictement plus petit que le dénominateur. Par exemple, on peut utiliser la méthode ci-dessus pour écrire

$$\frac{x}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}.$$

Nous verrons les fondements théoriques de cette méthode dans le chapitre 16...