

Chapitre 10

Limites de fonctions et continuité

Définition 1

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, $x \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que x est **adhérent** à A s'il $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

Proposition 2

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si $x \in \mathbb{R}$, x est adhérent à A si et seulement si

$$\forall \eta > 0, \exists a \in A, |x - a| \leq \eta.$$

2. Si $x = +\infty$, x est adhérent à A si et seulement si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists a \in A, a \geq M.$$

3. Si $x = -\infty$, x est adhérent à A si et seulement si

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists a \in A, a \leq m.$$

Démonstration

On ne va pas démontrer l'équivalence, c'est un exercice! (qui ressemble énormément à toutes les équivalences de la notion de densité!) ■

Remarque 3

Un cas particulier est à garder en tête! Si I est un intervalle, un point adhérent à I , c'est simplement un point ou une borne (éventuellement infinie) de I .

Dans tout ce chapitre, on travaillera sur une partie U de $\mathbb{R}$, a priori quelconque, mais qui, en pratique, sera très souvent un intervalle.

1 Limites

1.1 Voisinages

Définition 4

Soit $V \subset \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que V est un voisinage de a s'il existe $\eta > 0$ tel que $[a - \eta, a + \eta] \subset V$.
2. Si $a = +\infty$, on dit que V est un voisinage de a s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $[M, +\infty[\subset V$.
3. Si $a = -\infty$, on dit que V est un voisinage de a s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $] -\infty, m] \subset V$.

Exemple 5

1. Les fondamentaux :
 - $\forall \varepsilon > 0, \forall a \in \mathbb{R}, [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ est un voisinage de a .
 - $\forall a \in \mathbb{R}, [a, +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$ et $] -\infty, a]$ est un voisinage de $-\infty$.
2. $\mathbb{R}$ est un voisinage de tout point de $\mathbb{R}$.
3. $\mathbb{N}$ n'est un voisinage d'aucun point de $\mathbb{R}$, ni de $+\infty$, ni de $-\infty$.

Proposition 6

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, V et V' deux voisinages de a . Alors $V \cap V'$ est un voisinage de a .

Démonstration

- si $a \in \mathbb{R}$, on dispose de $\eta > 0$, de $\eta' > 0$ tels que $[a - \eta, a + \eta] \subset V$ et $[a - \eta', a + \eta'] \subset V'$. Alors si $\eta'' = \min(\eta, \eta')$, $[a - \eta'', a + \eta'']$ est une partie de V et de V' , donc de $V \cap V'$. Donc $V \cap V'$ est un voisinage de a .
- si $a = +\infty$, on dispose de M et M' tels que $[M, +\infty[\subset V$ et $[M', +\infty[\subset V'$. En posant $M'' = \max(M, M')$, $[M'', +\infty[\subset V \cap V'$.
- on fait de même si $a = -\infty$.

■

Définition 7

Soit $(\mathcal{P}(x))_{x \in \mathbb{R}}$ une proposition indexée sur $\mathbb{R}$. Si $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on dit que $\mathcal{P}(x)$ est vraie au voisinage de a s'il existe V un voisinage de a sur lequel $\mathcal{P}$ est vraie.

Proposition 8

Si A est une partie de $\mathbb{R}$, si x est adhérent à A et si V est un voisinage de x , alors $A \cap V \neq \emptyset$.

1.2 Définitions

Dans toute cette partie, D désigne une partie de $\mathbb{R}$ (y penser comme un intervalle).

Définition 9

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, a un point adhérent à D et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a et on note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ si pour tout voisinage V de ℓ , il existe D un voisinage de A tel que

$$\forall x \in D, x \in V \Rightarrow f(x) \in V.$$

Cette proposition est bien parce qu'elle est courte, mais il faut absolument l'expliciter !

Définition 10

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, a un point adhérent à D et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

(i) Si $a \in \mathbb{R}$,

(a) si $\ell \in \mathbb{R}$,

$$(f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, (|x - a| \leq \eta) \Rightarrow (|f(x) - \ell| \leq \varepsilon))$$

(b) si $\ell = +\infty$,

$$(f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty) \Leftrightarrow (\forall M > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, (|x - a| \leq \eta) \Rightarrow (f(x) \geq M))$$

(c) si $\ell = -\infty$,

$$(f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty) \Leftrightarrow (\forall m < 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, (|x - a| \leq \eta) \Rightarrow (f(x) \leq m))$$

(ii) Si $a = +\infty$,

(a) si $\ell \in \mathbb{R}$,

$$(f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in D, (x \geq B) \Rightarrow (|f(x) - \ell| \leq \varepsilon))$$

(b) si $\ell = +\infty$,

$$(f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty) \Leftrightarrow (\forall M > 0, \exists B > 0, \forall x \in D, (x \geq B) \Rightarrow (f(x) \geq M))$$

(c) si $\ell = -\infty$,

$$(f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty) \Leftrightarrow (\forall m < 0, \exists B > 0, \forall x \in D, (x \geq B) \Rightarrow (f(x) \leq m))$$

(iii) Si $a = -\infty$,

(a) si $\ell \in \mathbb{R}$,

$$(f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ell) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists b < 0, \forall x \in D, (x \leq b) \Rightarrow (|f(x) - \ell| \leq \varepsilon))$$

(b) si $\ell = +\infty$,

$$(f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty) \Leftrightarrow (\forall M > 0, \exists b < 0, \forall x \in D, (x \leq b) \Rightarrow (f(x) \geq M))$$

(c) si $\ell = -\infty$,

$$(f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty) \Leftrightarrow (\forall m < 0, \exists b < 0, \forall x \in D, (x \leq b) \Rightarrow (f(x) \leq m))$$

Remarque 11

Comme toujours, on peut remplacer $\forall \varepsilon > 0$ par $\forall \varepsilon \in]0, 1[$, remplacer $\forall M \in \mathbb{R}$ par $\forall M \geq 0$, $\forall M \geq 1$.

Exemple 12

Démontrer que $\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$. Ici $U = \mathbb{R}^*$.

Proposition 13

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, a adhérent à D , $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. La limite de f en a , si elle existe, est unique. On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, ou bien $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Démonstration

On étudie uniquement le cas où les limites sont réelles. Soient ℓ et ℓ' deux réels tels que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell'$.

On suppose $\ell < \ell'$ (sans perte de généralité).

Prenons $\varepsilon = \frac{\ell' - \ell}{3}$. Alors $\ell + \varepsilon < \ell' - \varepsilon$.

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ donc on dispose de V voisinage de a tel que

$$\forall x \in D, x \in V \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell'$ donc on dispose de V' voisinage de a tel que

$$\forall x \in D, x \in V' \Rightarrow |f(x) - \ell'| \leq \varepsilon.$$

Alors $V \cap V'$ est un voisinage de a (en particulier, $V \cap V' \cap U \neq \emptyset$).

Soit alors $x \in V \cap V' \cap U$. On a donc

$$f(x) \leq \ell + \varepsilon < \ell' - \varepsilon \leq f(x).$$

ABSURDE ! D'où l'unicité. ■

Remarque 14

Il faut pouvoir expliciter la démonstration précédente sans voisinage.

Proposition 15

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D . Si f admet une limite **finie** en a , alors f est bornée au voisinage de a .

Démonstration

Soit $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Prenons $\varepsilon = 1$. Alors on dispose d'un voisinage V de a tel que pour tout x dans $V \cap D$, $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. Alors, pour tout x dans $V \cap D$,

$$|f(x)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell| \leq |\ell| + 1,$$

donc f est bien bornée au voisinage de a . ■

Une proposition toute bête, mais qui est importante... et qu'il faut garder en tête pour lorsque l'on définira la notion de continuité!

Proposition 16

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$. Alors si f admet une limite ℓ en a , cette limite est finie et $f(a) = \ell$.

Démonstration

On sait que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors on dispose de $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in D, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Prenons $x = a$. Alors $x \in U$ et $|x - a| = 0 \leq \eta$. Donc

$$|f(a) - \ell| \leq \varepsilon.$$

La proposition précédente est vraie pour tout ε . Si on avait $f(a) \neq \ell$, alors on aurait une contradiction en prenant $\varepsilon = \frac{|f(a) - \ell|}{2}$. ■

Une grosse différence avec les limites de suites est que l'on peut aussi parler de limites à gauche et à droite lorsqu'on manipule des fonctions.

Définition 17

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, a un **réel** adhérent à D .

1. On dit que f est définie sur un voisinage à gauche (resp. à droite) de a s'il existe un voisinage V de a tel que $V \cap]-\infty, a[\subset D$ (resp. $V \cap]a, +\infty[\subset D$)

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

2. Si f est définie au voisinage à gauche de a , on dit que ℓ est une (en fait la) limite à gauche de a , et on note

$$f(x) \xrightarrow[x < a]{x \rightarrow a} \ell, \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} \ell, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} = \ell,$$

si pour tout voisinage V de ℓ , il existe U voisinage de a tel que

$$\forall x \in D, (x \in U) \wedge (x < a) \Rightarrow f(x) \in V.$$

3. Si f est définie au voisinage à droite de a , on dit que ℓ est une (en fait la) limite à droite de a , et on note

$$f(x) \xrightarrow[x > a]{x \rightarrow a} \ell, \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} = \ell,$$

si pour tout voisinage V de ℓ , il existe U voisinage de a tel que

$$\forall x \in D, (x \in U) \wedge (x > a) \Rightarrow f(x) \in V.$$

Remarque 18

1. On ne prouve pas ici l'unicité de la limite à droite.
2. Une fonction admettant une limite finie à gauche/à droite en un point est bornée au voisinage à gauche/à droite de ce point.
3. On ne reprécisera pas à chaque fois mais les propriétés que l'on va énoncer sur les limites (opérations, encadrements, etc.) seront bien sûr valables pour les limites à gauche/à droite.
4. Il faut pouvoir adapter les définitions des limites à gauche et à droite avec des $\varepsilon/M/m/\eta$.

Proposition 19

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, a un réel adhérent à D , $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$.

1. si $a \in D$, alors f admet la limite ℓ en a si, et seulement si

$$\left(\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell \right) \text{ et } \left(\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell \right) \text{ et } f(a) = \ell.$$

2. si $a \notin D$, alors f admet la limite ℓ en a si, et seulement si

$$\left(\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell \right) \text{ et } \left(\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell \right).$$

Démonstration

1. $\Rightarrow$ Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, déjà, on a vu que $f(a) = \ell$.

Ensuite, soit $\varepsilon > 0$. Par convergence, on sait que l'on dispose de $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in D, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Donc

$$\forall x \in D, |x - a| \leq \eta \text{ et } x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

et

$$\forall x \in D, |x - a| \leq \eta \text{ et } x > a \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} \ell$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell$.

- $\Leftarrow$ Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} \ell$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell$ et $f(a) = \ell$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par la première limite, on dispose de $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in D, |x - a| \leq \eta \text{ et } x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Par la seconde limite, on dispose de $\eta' > 0$ tel que

$$\forall x \in D, |x - a| \leq \eta' \text{ et } x > a \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Posons $\eta'' = \min(\eta, \eta')$.

2. On adapte dans le cas où $a \notin D$.

■

Exemple 20

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x-1)^2}$.

Déterminer les limites à droite et à gauche de $[2x]$ quand x tend vers $\frac{1}{2}$.

On va essayer maintenant de réutiliser ce qui a été fait sur les suites : c'est la *caractérisation séquentielle* des limites :

Proposition 21

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, a point adhérent à D , $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors f admet une limite ℓ en a si, et seulement si

$$\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}, \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell \right).$$

Démonstration

On ne traite que le cas où a et ℓ sont dans $\mathbb{R}$ (on ne fait pas les autres cas, ils sont pour vous!)

$\Rightarrow$ On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Alors on dispose de $\eta > 0$ tel que $\forall x \in D, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

Or, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ donc on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n - a| \leq \eta$.

Soit $n \geq N$. Alors $|u_n - a| \leq \eta$, donc $|f(u_n) - \ell| \leq \varepsilon$.

Donc $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

$\Leftarrow$ On raisonne par contraposée. On suppose que f ne tend pas vers ℓ quand x tend vers a . Alors on dispose de ε tel que

$$\forall \eta > 0, \exists x \in D, |x - a| \leq \eta \text{ et } |f(x) - \ell| > \varepsilon.$$

On construit alors une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers a et telle que $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Prenons $\eta = \frac{1}{2^n}$. Alors on dispose de $x_n \in D$ tel que $|x_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$ et $|f(x_n) - \ell| > \varepsilon$.

On a alors construit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $|x_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$, i.e. $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$, mais $|f(x_n) - \ell| > \varepsilon$, donc $f(x_n)$ ne converge pas vers ℓ .

■

Remarque 22

1. Cette caractérisation sert à montrer que des fonctions n'ont pas de limite. Par exemple, montrons que $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.
2. La caractérisation séquentielle fonctionne aussi pour des limites à gauche et à droite : on remplace « $\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ » par « $\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n < a$ » (si l'on regarde à gauche).

1.3 Théorèmes liés aux limites

Proposition 23 (Opérations sur les limites)

1. Règles sur les limites (cf. suites).
2. Soit $f : D \rightarrow E$, $g : E \rightarrow \mathbb{R}$, a un point adhérent à D , b un point adhérent à E , $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Démonstration. On ne va seulement prouver la composition.

- Preuve avec des voisinages. Soit W un voisinage de ℓ . Comme $g(y) \xrightarrow[y \rightarrow b]{} \ell$, on dispose de V voisinage de b tel que $\forall y \in E, y \in V \Rightarrow g(y) \in W$.
Comme $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} b$, on dispose de U voisinage de a tel que $\forall x \in D, x \in U \Rightarrow f(x) \in V$.
Soit $x \in D \cap U$. Alors $f(x) \in V$, donc $g(f(x)) \in W$.
- Preuve sans voisinage, avec des ε et des η . On suppose a, b et ℓ finis.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $g(y) \xrightarrow[y \rightarrow b]{} \ell$, on dispose de $\eta > 0$ tel que

$$\forall y \in E, |y - b| \leq \eta \Rightarrow |g(y) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Mais comme $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} b$, on dispose de $\xi > 0$ tel que

$$\forall x \in D, |x - a| \leq \xi \Rightarrow |f(x) - b| \leq \eta.$$

Soit $x \in D$ tel que $|x - a| \leq \xi$. Alors $|f(x) - b| \leq \eta$.

Donc $|g(f(x)) - \ell| \leq \varepsilon$.

□

Proposition 24 (limites et inégalités)

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, qui admet une limite finie ℓ en a adhérent à D , m et M deux réels.

- (i) Si $\ell < M$, alors il existe un voisinage de a sur lequel f est strictement majorée par M .
- (ii) Si $\ell > m$, alors il existe un voisinage de a sur lequel f est strictement minorée par m .

Proposition 25

Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, a un point adhérent à D . On suppose que f et g ont une limite finie en a .

1. S'il existe un voisinage V de a tel que

$$\forall x \in V, f(x) \leq g(x),$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Remarque 26

Attention, cela ne passe pas aux inégalités strictes !

Proposition 27 (Théorèmes d'encadrement)

Soit f , u , v trois fonctions de $\mathbb{R}^D$, a un point adhérent à D , $\ell \in \mathbb{R}$.

- (i) Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = +\infty$ et s'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in V, u(x) \leq f(x)$, alors f admet une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.
- (ii) Si $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = -\infty$ et s'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in V, f(x) \leq v(x)$, alors f admet une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.
- (iii) Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \lim_{x \rightarrow a} v(x) = \ell$ et s'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in V, u(x) \leq f(x) \leq v(x)$, alors f admet une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Théorème 28 (Théorème de la limite monotone)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, monotone.

1. f admet une limite en tout point c de $]a, b[$. De plus,
 - si f est croissante, $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$.
 - si f est décroissante, $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \geq f(c) \geq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$.
2. Si f est croissante, alors
 - en b ,
 - si f est majorée, alors f a une limite en b ,
 - sinon $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} +\infty$.
 - en a ,
 - si f est minorée, alors f a une limite en a ,
 - sinon $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$.
3. Si f est décroissante, on inverse.
4. La proposition fonctionne de la même manière si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

Démonstration

On se place uniquement dans le cas croissant.

1. Soit $c \in]a, b[$.
 Notons $A = \{f(x), a < x < c\}$.
 A est non vide et $\forall x \in]a, c[, f(x) \leq f(c)$ par croissance de f .
 Donc A est majorée.
 Donc A admet une borne supérieure ℓ , qui vérifie $\ell \leq f(c)$.
 Montrons que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c^-} \ell$.
 Soit $\varepsilon > 0$.
 $\ell = \sup(A)$ donc on dispose de $y \in A$ tel que $\ell - \varepsilon \leq y \leq \ell$.
 Or, $y \in A$ donc on dispose de $x_0 \in]a, c[$ tel que $y = f(x_0)$.
 Posons $\eta = c - x_0 > 0$.
 Soit $x \in]a, c[$ tel que $|x - c| \leq \eta$.
 Alors $c - \eta \leq x \leq c$, i.e. $x_0 \leq x$.
 Donc $f(x_0) \leq f(x)$.
 Comme $f(x_0) \geq \ell - \varepsilon$ et $f(x) \leq \ell$, $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
 On fait de même en c^+ .
2. Pour les bornes, on regarde en b . Notons $A = \{f(x), x \in]a, b[\}$.
 - si f est majorée sur $]a, b[$, A est majorée, non vide, donc admet une borne supérieure ℓ .
 En adaptant la preuve de ce qui se passe en c^- , on obtient le résultat.
 - si f n'est pas majorée, on montre que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} +\infty$.
 Soit $M \in \mathbb{R}$.
 A n'est pas majorée donc on dispose de $y \in A$ tel que $y \geq M$, i.e. on dispose de $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) \geq M$.
 Posons $\eta = b - x_0 > 0$.
 Soit $x \in]a, b[$ tel que $|x - b| \leq \eta$.

Alors $x \geq b - \eta = x_0$, donc $f(x) \geq g(x_0) \geq M$.
Donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} +\infty$.

■

1.4 Extension au monde complexe

On étend les limites de fonctions pour des fonctions à valeurs complexes, comme on l'a fait pour les suites.

Remarque 29

Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, on peut aussi dire que $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow a} \ell$, avec a et ℓ dans $\mathbb{C}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall z \in \mathbb{C}, |z - a| \leq \eta \Rightarrow |f(z) - \ell| \leq \varepsilon.$$

1.5 Un peu d'analyse asymptotique

On va simplement adapter les définitions vues sur les suites !

Définition 30

Soit $I \subset \mathbb{R}$, a un point adhérent à I , $(f, g) : I \rightarrow \mathbb{R}$.

1. si g ne s'annule pas sur un voisinage de a ,

(a) On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a ou que $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ quand $x \rightarrow a$, ou que « $f(x)$ est un petit o de $g(x)$ quand x tend vers a », et on écrit $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ si $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

(b) On dit que f est dominée par g au voisinage de a ou que $f(x)$ est dominée par $g(x)$ quand x tend vers a , ou encore que « $f(x)$ est un grand O de $g(x)$ quand x tend vers a », et on note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$ si $\frac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de a .

(c) On dit que f est équivalente à g au voisinage de a , ou que $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ quand x tend vers a , et on écrit $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ si $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$.

2. Cas général.

On dit que $\begin{cases} f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)) \\ f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x)) \\ f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \end{cases}$ s'il existe $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = g(x)h(x)$ au voisinage de a , et $\begin{cases} h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \\ h \text{ est bornée au voisinage de } a. \\ h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1 \end{cases}$

Remarque 31



1. $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} 0$ si et seulement si f est nulle au voisinage de a .
2. Attention au point a ! En effet,
 - $\frac{x^2}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$ donc $x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$
 - $\frac{x^2}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^2)$
 - $\frac{x^2}{x} \underset{x \rightarrow 1}{\longrightarrow} 1$ donc $x^2 \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x$.

On a les mêmes propriétés usuelles que sur les suites. Rappelons-en quelques unes.
On a de plus les équivalents et prépondérances classiques.

Proposition 32 (Prépondérances classiques – croissances comparées)

1. Si $a < b$, $x^a \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^b)$,
2. Si $a < b$, $x^b \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^a)$,
3. Si $0 < a < b$, $a^x \underset{x \rightarrow \infty}{=} b^x$,
4. (croissances comparées) Si $a, b > 0$,

$$\ln(x)^a \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^b), \quad x^a \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{bx}), \quad \ln(x)^a \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{-b}),$$
5. (prépondérances classiques avec les factorielles) Si $x > 0$,

$$x^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n!) \text{ et } n! \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n^n.$$

Proposition 33 (Équivalents célèbres)

Tous les équivalents de cette proposition sont pris en 0.

1. $\sin(x) \sim x$
2. $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$
3. $\tan(x) \sim x$
4. $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$
5. $e^x - 1 \sim x$
6. $\ln(1+x) \sim x$
7. $\text{Arcsin}(x) \sim x$
8. $\text{Arctan}(x) \sim x$

Deux propriétés sont à redire particulièrement :

Proposition 34 (Composition d'équivalents)

- Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$, alors $f(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} g(u_n)$.
- Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \xrightarrow[x \rightarrow b]{} a$, alors $f \circ h(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g \circ h(x)$.

Remarque 35

- En d'autres termes, on peut composer les équivalents **à droite**.
- On ne peut en revanche **PAS** les composer à gauche.

2 Continuité

2.1 Définition, aspects locaux

Définition 36

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$.

1. On dit que f est continue en a si l'une des trois définitions équivalentes est vérifiée :

- $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} f(a)$,
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$,
- f a une limite en a .

2. f est continue sur D si elle est continue en tout point de D , i.e.

$$\forall a \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

3. f est continue à droite en a (resp. à gauche) si $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a^+]{} f(a)$ (resp. a^-)

4. On note $\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de D dans $\mathbb{R}$.

Exemple 37

1. Si $E : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lfloor x \rfloor \end{cases}$, E est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, mais n'est continue en aucun entier (en revanche, elle est continue à droite en tous les entiers).

2. Si

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

on montre que f est continue en 0.

Étant données les définitions que nous avons vues de la notion de limite,

Proposition 38 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, a un point de D . f est continue en a si, et seulement si

$$\forall (u_n) \text{ telle que } u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a, \quad f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a).$$

Exemple 39

- Démontrons que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$.
 - si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on pose $u_n = \frac{\lfloor 10^n a \rfloor}{10^n}$. Alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(u_n) = 1$, donc

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \neq \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(a),$$
 donc $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue en a .
 - si $a \in \mathbb{Q}$, on pose, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = a + \frac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, et pourtant,

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(u_n) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \neq \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(a).$$
- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue, telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Montrons que f est linéaire.
 - $f(0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$.
 - On montre par récurrence immédiate que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$.
 - On montre que pour tout n dans $\mathbb{Z}$ et pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$
 - si $n \in \mathbb{N}$, c'est gagné.
 - sinon, $f(nx - nx) = 0$ et $f(nx - nx) = f(nx) + f(-nx)$. Donc $f(nx) = -f(-nx)$. Comme $-n \in \mathbb{N}$, $f(-nx) = -nf(x)$, donc $f(nx) = nf(x)$.
 En particulier, pour tout n dans $\mathbb{Z}$, $f(n) = nf(1)$.
 - On montre que $\forall x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = xf(1)$.
 Soit $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$f(qx) = qf(x) \text{ et } f(qx) = f(p) = pf(1),$$
 Donc $f(x) = \frac{p}{q}f(1)$.
- On montre que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf(1)$.
 Soit $x \in \mathbb{R}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on dispose de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.
 Alors, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $f(u_n) = u_n f(1)$ car $u_n \in \mathbb{Q}$.
 Or, $u_n f(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x f(1)$.
 De plus, **par continuité de f** , $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$.
 Par unicité de la limite, $f(x) = x f(1)$, d'où le résultat désiré !

Proposition 40 (Théorèmes généraux)

Soit $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonction continues en un point a de I , λ et μ deux réels. Alors

- $\lambda f + \mu g$ est continue en a .
- $f g$ est continue en a .
- si g ne s'annule pas sur un voisinage de a , $\frac{f}{g}$ est continue en a .
- si h est une fonction définie sur un voisinage de $f(a)$ et continue en $f(a)$, $h \circ f$ est continue en a .

Point de méthode 41

Si l'on veut démontrer la continuité d'une fonction f sur D , on repère les points problématiques, et, pour les autres, on dit « par théorèmes généraux ».

Exemple. Si

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Alors

- f est continue en 0 par l'exemple fait précédemment,
- f est continue sur $\mathbb{R}^*$ par les théorèmes généraux,

donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Ce dernier exemple appelle une définition, celle du prolongement par continuité.

Proposition 42

(et def) Soit I un **intervalle**. Soit a un point de I , $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que f admette la même limite ℓ à gauche et à droite de a . On dit alors que f est prolongeable par continuité en a , et la fonction

$$\bar{f} : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\}, \\ \ell & \text{si } x = a, \end{cases}$$

est continue et est appelée prolongement par continuité de f en a .

Remarque 43

On pourrait retirer l'hypothèse « f continue sur $I \setminus \{a\}$ » mais, en pratique, on fait toujours un prolongement par continuité d'une fonction continue !

Exemple 44

1. L'exemple fait précédemment.

2. Si $h : \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}} \end{cases}$, étudier la possibilité d'un prolongement par continuité de h .

Certaines fonctions, cependant, ne sont pas prolongeables par continuité : prendre la fonction partie entière par exemple. On définit alors la notion de fonction continue par morceaux.

Définition 45

1. Soit $[a, b]$ un segment, f définie sur $[a, b]$. f est dite continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe un entier n , $n + 1$ points $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$ tels que pour tout k dans

$\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $f|_{]a_k, a_{k+1}[}$ est continue sur $]a_k, a_{k+1}[$ et prolongeable par continuité en a_k et a_{k+1} .
(i.e. si cette restriction a des limites finies en a_k et a_{k+1})

2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est continue par morceaux sur I si elle est continue par morceaux sur chaque segment de I .
3. On note $\mathcal{C}_{\text{pm}}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions cpm de I dans $\mathbb{R}$.

Exemple 46

1. La partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \tan(x) & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2}[\pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

n'est **pas** continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, car elle n'a pas de limite finie à droite et à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

3 Aspects globaux

3.1 Surjectivité et TVI

Dans tout le chapitre, I désigne un **intervalle**.

Théorème 47 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I , $a < b$ deux points de I . Alors pour tout réel M entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe x dans $[a, b]$ tel que $y = f(x)$.

Démonstration

On va donner deux preuves, les deux arguments sont importants à connaître.

1. Preuve de Bolzano, par borne supérieure. On suppose, sans perte de généralité, que $f(a) < M < f(b)$ (on met même des inégalités strictes car s'il y a égalité, le résultat est démontré). Considérons

$$A = \{x \in [a, b], f(x) \leq M\}.$$

Alors A est une partie non vide ($a \in A$), majorée (par b) de $\mathbb{R}$, donc admet une borne supérieure $c \in [a, b]$. Démontrons que $f(c) = M$.

- Comme $c = \sup(A)$, alors on dispose d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c$. Or, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $f(u_n) \leq M$ donc, par continuité de f et passage à la limite dans les inégalités, $f(c) \leq M$.

- Ensuite, $\forall x \in]c, b], f(x) > M$ (car $x \notin A$). Or, comme $c = \inf([c, b])$, on dispose de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $]c, b]$ telle que $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c$ (prendre $c + \frac{1}{n}$ par exemple, qui est bien dans $]c, b]$ à partir d'un certain rang). Mais alors $f(v_n) > M$ donc par continuité de f et passage à la limite dans les inégalités, $f(c) \geq M$.

Donc $f(c) = M$, d'où le résultat !

■

Remarque 48

1. On n'a pas besoin de monotonie !
2. Une formulation rapide et importante du TVI est « l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle » .
En effet, $f(I)$ intervalle
 $\Leftrightarrow \forall (y, z) \in f(I)^2, y < z, [y, z] \subset f(I)$.
C'est exactement le TVI.
3. On peut aussi le résumer en « une fonction continue qui change de signe s'annule » .

Proposition 49 (TVI aux limites)

Soient a et b dans $\mathbb{R}$, $a < b$, $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} \ell'$, si M est un réel compris strictement entre ℓ et ℓ' , alors il existe c dans $]a, b[$ tel que $f(c) = M$.

Démonstration

Idée de la démo : si $\ell < M < \ell'$, alors il existe x_0 dans $\mathbb{R}$ tel que $f(x_0) < M$ et x_1 dans $\mathbb{R}$ tel que $f(x_1) > M$. ■

Exercice 50

Démontrer que tout polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle et est surjectif sur $\mathbb{R}$.

On l'a vu, le TVI donne de bons résultats de surjectivité. Que faut-il pour avoir de l'injectivité ?

3.2 Injectivité et monotonie

Proposition 51

Une fonction strictement monotone sur un intervalle est injective.

Démonstration

Déjà faite dans le chapitre 5. ■

Proposition 52

Une fonction continue et injective sur un intervalle est strictement monotone.

Démonstration

1. Preuve « patate ». Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas strictement monotone, alors il existe $(a, b, c) \in I^3$ tels que $a < b < c$ et

$$f(a) \leq f(b) \text{ et } f(c) \leq f(b)$$

OU

$$f(a) \geq f(b) \text{ et } f(c) \geq f(b)$$

(c'est ce résultat qui est pénible à prouver !)

On se place dans le premier cas :

$$f(a) \leq f(b) \text{ et } f(c) \leq f(b)$$

- si $f(a) \leq f(c)$, alors $f(c) \in [f(a), f(b)]$.

Comme f est continue, on dispose, par le TVI, de $d \in [ab]$ tel que $f(d) = f(c)$. Comme $d \leq b < c$, $d \neq c$ et $f(d) = f(c)$, donc f n'est pas injective.

- De même si $f(a) \geq f(c)$.

2. Preuve jolie (merci MCV). Si f n'est pas strictement monotone, on dispose de (a, b, c, d) dans $\mathbb{R}^4$ tels que

$$a < b \text{ et } f(a) \leq f(b) \text{ et } c < d \text{ et } f(c) \geq f(d).$$

L'idée est alors de faire varier deux points « en même temps » : un entre a et b , un entre c et d . Considérons la fonction

$$\varphi : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(ta + (1-t)c) - f(tb + (1-t)d) \end{cases}$$

Alors $\varphi(0) = f(c) - f(d) \geq 0$ et $\varphi(1) = f(a) - f(b) \leq 0$, donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, on dispose de $t_0 \in [0, 1]$ tel que $\varphi(t_0) = 0$. Alors

$$f(t_0a + (1-t_0)c) = f(t_0b + (1-t_0)d).$$

Or, $a < b$ et $c < d$ donc, comme $t_0 > 0$ ou $1 - t_0 > 0$, $t_0a + (1-t_0)c < t_0b + (1-t_0)d$. Donc f n'est pas injective.

■

Remarque 53

Si f n'est pas continue, cette propriété n'est pas vraie. Prenons $f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

3.3 Bijectivité

Proposition 54 (TVI strictement monotone – théorème de la bijection)

Soit $I = (a, b) \in \mathbb{R}$. Soit $I = (a, b)$ avec $(=]$ ou $[\text{ et }) =]$ ou $[$.
Soit $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, continue et strictement monotone. Soit $\ell_a = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\ell_b = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$.
Alors f réalise une bijection de (a, b) sur $J = (f(a), f(b))$ ou $J = (f(b), f(a))$ (le parenthèses dépendant de la nature du crochet en a et en b) et sa bijection réciproque est continue.

Remarque 55

Il faut faire attention aux crochets ouverts ou fermés. Si $f :]2, 5]$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 2} +\infty$ et $f(5) = 4$, alors f est une bijection de $]2, 5]$ sur $[4, +\infty[$ par exemple.

Démonstration

Le fait que f réalise une bijection est clair par le TVI et la stricte monotonie.
Ensuite, $g = f^{-1}$ est strictement monotone, de même monotonie que f .
(en effet si $y < y'$, alors on dispose de (x, x') tels que $y = f(x)$, $y' = f(x')$, et on a donc $f(x) < f(x')$. Si on avait $x \geq x'$, par monotonie de f , $f(x) \geq f(x')$, absurde!) Donc $x < x'$ i.e. $g(y) < g(y')$.
Soit b dans J . On montre que $g(y)$ admet comme limite $g(b)$ quand y tend vers b .
Comme g est monotone, g admet une limite à gauche en b , appelons-la ℓ . Alors $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b^-} \ell$ donc, par continuité de f , $f(g(y)) \xrightarrow{y \rightarrow b^-} f(\ell)$, i.e. $y \xrightarrow{y \rightarrow b^-} f(\ell)$, donc, par unicité de la limite, $b = f(\ell)$.
On fait de même pour la limite à droite et c'est gagné! ■

3.4 Fonctions continues sur un segment

Dans toute la section, a et b désignent deux réels tels que $a < b$.

Proposition 56

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration

1. On montre que f est bornée.

Si ce n'était pas le cas, on disposerait d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [a, b]^{\mathbb{N}}$ telle que $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ (on a déjà démontré la construction d'une telle suite dans le chapitre 8 : la revoir si ce n'est pas clair)

Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée (à valeurs dans $[a, b]$), par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on dispose d'une extraction φ telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge. Soit ℓ sa limite. Comme pour tout n dans $\mathbb{N}$, $a \leq x_{\varphi(n)} \leq \ell$, $\ell \in [a, b]$. Mais alors, par continuité de f , $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$. Absurde car $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc f est bornée.

2. f admet donc une borne supérieure sur $[a, b]$. Soit $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x) = \sup\{f(x), x \in [a, b]\}$.

Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, on dispose de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [a, b]^{\mathbb{N}}$ telle que $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M$.

Par le même argument que précédemment, on dispose d'une extraction φ et d'un réel $\ell \in [a, b]$ tels que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Alors $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$ donc $f(\ell) = M$ par unicité de la limite.

Donc M est atteint.

3. On fait de même avec la borne inférieure.

■

Proposition 57

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Exemple 58 (Fonctions coercives)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum et qu'elle l'atteint.