TD 6
Intégration

1 Exercices corrigés en classe – calculs avancés

NB : comme il y a eu beaucoup d'exercices dans le poly de cours, ces exercices sont difficiles. C'est normal !

Exercice 1. Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$, ...

- en effectuant le changement de variables $t = \tan \dfrac{x}{2}$,
- en écrivant que $\dfrac{1}{\cos(x)} = \dfrac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)}$ (et en faisant éventuellement le changement de variables $y = \sin(x)$ si on ne voit pas d'intégration directe).

Exercice 2. *Lemme de Riemann-Lebesgue*. Soit f une fonction $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a, b]$. Démontrer que, si $\omega \in \mathbb{R}^*$,

$$\int_a^b f(t)\sin(n\omega t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 3. Représenter la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \max(x, t)dt$.

Exercice 4. Démontrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t+x}dt$ est dérivable et déterminer l'expression de sa dérivée.

Exercice 5. À l'aide d'un joli dessin, expliquer pourquoi la suite $\left(\displaystyle\int_0^{4\pi n} \frac{\sin(t)}{t}dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2 Exercices à faire en TD

Exercice 6. *Calculs directs*. ◐○○ - ●◐○ Calculer les intégrales ou primitives suivantes, sans utiliser ni IPP, ni changement de variable.

1. $\displaystyle\int_{-2}^3 (y^2 - y + 4)dy$,
2. $\displaystyle\int_0^2 xe^{-3x^2}dx$,
3. $\displaystyle\int^x \frac{1}{(3t+2)^2}dt$,
4. $\displaystyle\int_1^4 \frac{\ln(t)}{t}dt$,
5. $\displaystyle\int^x \frac{1}{t\ln(t)}dt$,
6. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)dx$,
7. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos(x)dx$,
8. $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{sh}(t)dt$,
9. $\displaystyle\int^x \tan^2(t)dt$,
10. $\displaystyle\int^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{Arcsin}(t)}$,
11. $\displaystyle\int^x \frac{\sin(2\theta)}{1+\cos^2(\theta)}d\theta$
12. $\displaystyle\int^x \frac{dt}{\cos^2(t)\tan(t)}$.

Correction

Ici il s'agit toujours d'intégration directe !

1. $\displaystyle\int_{-2}^{3} y^2 - y + 4dy = \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 4y\right]_{-2}^{3} = 9 - \frac{9}{2} + 36 - \frac{-8}{3} + \frac{4}{2} - 4 \times (-2) = \frac{175}{6}$
2. $\displaystyle\int_{0}^{2} x\mathrm{e}^{-3x^2} dx = \left[\frac{\mathrm{e}^{-3x^2}}{-6}\right]_0^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{6\mathrm{e}^{12}}$
3. $\displaystyle\int^{x} \frac{1}{(3t+2)^2} dt = -\frac{1}{3(3x+2)}$
4. $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{\ln(t)}{t} dt = \left[\frac{(\ln(t))^2}{2}\right]_1^4 = 2\ln(2)^2$
5. $\displaystyle\int^{x} \frac{1}{t\ln(t)} dt = \ln|\ln(x)|$
6. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$
7. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos(x) dx = \left[\frac{\sin(x)^2}{2}\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{8}$
8. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{sh}(t) dt = [ch(t)]_{-1}^{1} = 0$
9. $\displaystyle\int^{x} \tan^2(t) dt = \int^{x} 1 + \tan^2(t) - 1 dt = \tan(x) - x$

Exercice 7. *Intégration par parties*. ●○○ - ●●○ Calculer les intégrales suivantes, en utilisant une intégration par parties.

1. $\displaystyle\int_0^2 t\mathrm{e}^t dt$,
2. $\displaystyle\int_1^2 \ln\frac{t-1}{t+1} dt$,
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\theta}{\cos^2(\theta)} d\theta$
4. $\displaystyle\int^x t^2\mathrm{e}^t dt$,
5. $\displaystyle\int_0^y \ln(1+x^2) dx$,
6. $\displaystyle\int^x \mathrm{Arcsin}(t) dt$,
7. $\displaystyle\int^x t\mathrm{ch}(t) dt$,
8. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2t}\cos(t) dt$.

Correction

1. Pour calculer
$$\int_0^2 t\mathrm{e}^t dt,$$
Posons $u(t) = t$, $v'(t) = \mathrm{e}^t$. Donc $u'(t) = 1$, $v(t) = \mathrm{e}^t$. Donc, par intégration par parties,
$$\int_0^2 t\mathrm{e}^t dt = [t\mathrm{e}^t]_0^2 - \int_0^2 \mathrm{e}^t dt = 2\mathrm{e}^2 - e^2 + 1 = \mathrm{e}^2 + 1.$$

2. Pour calculer
$$\int t^2 e^t dt,$$
Posons $u(t) = t^2$, $v'(t) = e^t$. Donc $u'(t) = 2t$, $v(t) = e^t$. Donc, par intégration par parties,
$$\int t^2 e^t dt = t^2 e^t - 2\int te^t dt.$$
Puis on fait une deuxième intégration par parties, en posant $u(t) = t$, $v'(t) = e^t$, donc $u'(t) = 1$ et $v(t) = e^t$. D'où
$$\int t^2 e^t dt = t^2 e^t - 2te^t + 2\int e^t dt = e^t(t^2 - 2t + 2).$$

3. Posons $u(x) = \ln(1+x^2)$, $v'(x) = 1$. Alors $u'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ et $v(x) = x$. Donc, par intégration par parties,
$$\int_0^y \ln(1+x^2)dx = [x\ln(1+x^2)]_0^y - \int_0^y \frac{2x^2}{1+x^2}dx = y\ln(1+y^2) - 2\int_0^y \frac{x^2}{1+x^2}dx.$$
On écrit alors $\dfrac{x^2}{1+x^2} = \dfrac{1+x^2}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$, donc
$$\int_0^y \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int_0^y 1dx - \int_0^y \frac{1}{1+x^2}dx = y - \mathrm{Arctan}(y).$$
Donc
$$\int_0^y \ln(1+x^2)dx = y\ln(1+y^2) - 2y + 2\mathrm{Arctan}(y).$$

4. On pose $u'(s) = 1$, $v(s) = \mathrm{Arcsin}(s)$, alors $u(s) = s$ et $v'(s) = \dfrac{1}{\sqrt{1-s^2}}$ donc
$$\int \mathrm{Arcsin}(s)ds = s\mathrm{Arcsin}(s) - \int \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} = s\mathrm{Arcsin}(s) + \sqrt{1-s^2}.$$

5. Posons $u(x) = x$, $v'(x) = \mathrm{ch}(x)$. Alors $u'(x) = 1$, $v(x) = \mathrm{sh}(x)$. Donc, par IPP,
$$\int x\mathrm{ch}(x)dx = x\mathrm{sh}(x) - \int \mathrm{sh}(x)dx = x\mathrm{sh}(x) - \mathrm{ch}(x).$$

6. Posons $u(t) = e^{2t}$, $v'(t) = \cos(t)$, alors $u'(t) = 2e^{2t}$ et $v(t) = \sin(t)$. Donc
$$\mathrm{I} = \int_0^1 e^{2t}\cos(t)dt = [e^{2t}\sin(t)]_0^1 - \int_0^1 2e^{2t}\sin(t)dt.$$
Dans la deuxième intégrale, on pose $u(t) = e^{2t}$ et $v'(t) = -\sin(t)$. Alors $u'(t) = 2e^{2t}$ et $v(t) = \cos(t)$ donc
$$\mathrm{I} = e^2\sin(1) + [2e^{2t}\cos(t)]_0^1 - \int_0^1 4e^{2t}\cos(t)dt = e^2\sin(1) + 2e^2\cos(1) - 2 - 4\mathrm{I},$$
donc $5\mathrm{I} = e^2\sin(1) + 2e^2\cos(1)$ donc $\mathrm{I} = \dfrac{e^2}{5}\sin(1) + \dfrac{2}{5}e^2\cos(1) - \dfrac{2}{5}$.

Exercice 8. *Changement de variable*. ●○○ - ●●○ Calculer les intégrales suivantes, en effectuant des changements de variable adéquats.

1. $^x\int \dfrac{dt}{t+\sqrt{t}}$,
2. $\displaystyle\int_2^y \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$, où $y > 1$,
3. $\displaystyle\int_1^y \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}dt$,
4. $\displaystyle\int_{-1}^1 \theta^2\sqrt{1-\theta^2}d\theta$,
5. $\displaystyle\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t)+\cos(t)}dt$,
6. $\displaystyle\int^x \sqrt{\mathrm{e}^t-1}dt$.

Correction

1. Pour calculer $\displaystyle\int^x \frac{dt}{t+\sqrt{t}}$, effectuons un changement de variables :
- Posons $u=\sqrt{t}$. Alors $t=u^2$.
- $\dfrac{1}{t+\sqrt{t}} = \dfrac{1}{u^2+u}$
- $\dfrac{dt}{du} = 2u$ donc $dt = 2udu$
- Donc $\displaystyle\int^x \frac{dt}{t+\sqrt{t}} = \int \sqrt{x}\frac{2u}{u^2+u}du = \int^{\sqrt{x}} \frac{2}{1+u} = 2\ln(1+\sqrt{x})$.

2. Effectuons un changement de variables.
- Posons $u=\sqrt{x-1}$. Alors $x=u^2+1$.
- Quand $x=2$, $u=1$. Quand $x=y$, $u=\sqrt{y-1}$.
- $\dfrac{x}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{u^2+1}{u}$.
- $x=u^2+1$ donc $dx = 2udu$.

Donc

$$\begin{aligned}\int_2^y \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx &= \int_1^{\sqrt{y-1}} \frac{u^2+1}{u}2udu = 2\int_1^{\sqrt{y-1}} u^2+1du \\ &= 2\left[\frac{u^3}{3}+u\right]_1^{\sqrt{y-1}} = \frac{\sqrt{y-1}^3}{3} + \sqrt{y-1} - \left(\frac{1}{3}+1\right)\end{aligned}$$

3. Pour calculer $\displaystyle\int_1^y \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}dt$, effectuons un changement de variables.
- Posons $s=\mathrm{e}^t$.
- Quand $t=1$, $s=\mathrm{e}$. Quand $t=y$, $s=\mathrm{e}^y$.
- $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}} = \dfrac{2}{s+\frac{1}{s}}$.
- $y=\ln(s)$ donc $dy = \dfrac{ds}{s}$.

Comment peut-on penser à ce changement de variables ? Déjà on essaie de poser ch(t) *comme nouvelle variable, et on voit que ça n'aboutit à rien. Du coup on décompose* ch(t) *pour voir si un de ses « morceaux » peut être la nouvelle variable : c'est le cas !* Donc

$$\begin{aligned}\int_1^y \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}dt &= \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^y} \frac{2}{s+\frac{1}{s}}\frac{ds}{s} \\ &= \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^y} \frac{2}{s^2+1}ds \\ &= 2\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^y) - 2\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}).\end{aligned}$$

4. Pour calculer $\displaystyle\int_{-1}^1 \theta^2\sqrt{1-\theta^2}d\theta$, effectuons le changement de variables suivant

- posons $\theta = \sin(x)$, i.e. $x = \mathrm{Arcsin}(\theta)$. (en cours on a fait avec cos, donc je change !)
- quand $\theta = -1$, $x = -\dfrac{\pi}{2}$. Quand $\theta = 1$, $x = \dfrac{\pi}{2}$.
- $\theta^2\sqrt{1-\theta^2} = \sin^2(x)\sqrt{1-\sin^2(x)}$. Or, $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos(x) \geqslant 0$, donc $\sqrt{1-\sin^2(x)} = \cos(x)$. DOnc

$$\theta^2\sqrt{1-\theta^2} = \sin^2(x)\cos(x)$$

- $\theta = \sin(x)$, donc $d\theta = \cos(x)dx$.

Comment penser à ce changement de variables ? Là, c'est la formule $\sin^2 + \cos^2 = 1$ *qui doit résonner dans votre tête quand vous voyez* $\sqrt{1-\theta^2}$ *!*
Donc

$$\int_{-1}^1 \theta^2\sqrt{1-\theta^2}d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^2(x)dx.$$

Or, $\sin(x)\cos(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x)$, donc

$$\sin^2(x)\cos^2(x) = \frac{1}{4}\sin^2(2x) = \frac{1}{8}(1-\cos(4x)).$$

Donc

$$\int_{-1}^1 \theta^2\sqrt{1-\theta^2}d\theta = \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos(4x)dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(4x)dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{32}[\sin(4x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$$

5. Pour calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t)+\cos(t)}dt$, effectuons le changement de variables suivant

- $u = \tan(t/2)$, donc $t = 2\mathrm{Arctan}(u)$.
- quand $t = 0$, $u = 0$; quand $t = \dfrac{\pi}{2}$, $u = 1$.
- On sait que $\cos(t) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ et que $\sin(t) = \dfrac{2u}{1+u^2}$, donc

$$\frac{1}{\sin(t)+\cos(t)} = \frac{1}{\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \frac{1+u^2}{1+2u-u^2}$$

- $t = 2\mathrm{Arctan}(u)$ donc $dt = \dfrac{2du}{1+u^2}$.

Donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t)+\cos(t)}dt = \int_0^1 \frac{1+u^2}{1+2u-u^2}\frac{2du}{1+u^2} = 2\int_0^1 \frac{1}{1+2u-u^2}du.$$

Or, $1+2u-u^2 = -\left(u-1-\sqrt{2}\right)(u-1+\sqrt{2})$, donc

$$\frac{1}{1+2u-u^2} = -\frac{1}{(u-1-\sqrt{2})(u-1+\sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{u-1+\sqrt{2}} - \frac{1}{u-1-\sqrt{2}}\right),$$

donc

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t)+\cos(t)}dt &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \left(\frac{1}{u-1+\sqrt{2}} - \frac{1}{u-1-\sqrt{2}}\right)du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left[\ln(u-1+\sqrt{2}\right]_0^1 - [\ln(1+\sqrt{2}-u)]_0^1\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln(\sqrt{2}) - \ln(\sqrt{2}-1) - \ln(\sqrt{2}) + \ln(1+\sqrt{2})\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)\end{aligned}$$

Pour info, $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \mathrm{Argth}(x)$, mais c'est totalement hors programme.

Exercice 9. *Orthogonalité des fonctions trigonométriques*. ●◐○ Déterminer, en fonction de la valeur de m et n entiers, la valeur de l'intégrale

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)dt.$$

Correction

Il faut pour cet exercice écrire $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$. Donc

$$\begin{aligned}I_{m,n} &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos((m+n)t)+\cos((m-n)t))dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos((m+n)t)dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos((m-n)t).\end{aligned}$$

Or,

$$\int_0^{2\pi}\cos(\alpha t)dt = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha \neq 0 \\ 2\pi \text{ sinon}\end{cases}$$

Donc

$$I_{m,n} = \begin{cases} 0 \text{ si } m+n \neq 0 \text{ et } m-n \neq 0 \\ \pi \text{ si } m+n = 0 \text{ et } m-n \neq 0 \\ \pi \text{ si } m-n = 0 \text{ et } m+n \neq 0 \\ 2\pi \text{ si } m+n = 0 \text{ et } m-n = 0, \text{ i.e. } m=n=0. \end{cases}$$

Exercice 10. ●●○ Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que pour tout x de $[a,b]$, $f(a+b-x) = f(x)$.

1. Interpréter l'égalité en termes de graphe de f.

Correction

Cela signifie que le graphe de f a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \dfrac{a+b}{2}$.

2. Montrer que

$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

Correction

Appelons I l'intégrale $\displaystyle\int_a^b x f(x) dx$. Effectuons dans cette intégrale le changement de variables $y = a+b-x$. Alors quand $x = a$, $y = b$ et quand $x = b$, $y = a$. Ensuite, $xf(x) = (a+b-y)f(a+b-y) = (a+b-y)f(y)$. Ensuite, $dx = -dy$. Donc

$$\mathrm{I} = \int_b^a (a+b-y)f(y)(-dy) = \int_a^b (a+b-y)f(y)dy = \int_a^b (a+b)f(y)dy - \int_a^b yf(y)dy = (a+b)\int_a^b f(y)dy - \mathrm{I},$$

donc $2\mathrm{I} = (a+b)\displaystyle\int_a^b f(y)dy$ donc $\mathrm{I} = \dfrac{a+b}{2}\displaystyle\int_a^b f(y)dy$.

3. Application : calculer

$$\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)} dx.$$

Correction

On remarque que si on pose $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$, alors pour tout x, $f(\pi - x) = \dfrac{\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)} = \dfrac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$, donc, d'après le lemme précédent,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)} dx &= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)} dx \\ &= \frac{\pi}{2}\left[-\mathrm{Arctan}(\cos(x))\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}\left(-\mathrm{Arctan}(-1) + \mathrm{Arctan}(1)\right) = \frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

Exercice 11. ●●○ Pour tous entiers naturels n et p on pose

$$I_{n,p} = \int_0^1 t^n(1-t)^p dt.$$

1. Montrer que pour tout n non nul et pour tout p entier,

$$I_{n,p} = \frac{n}{p+1} I_{n-1,p+1}.$$

Correction

Soient n non nul et p dans $\mathbb{N}$. Posons, dans $\mathrm{I}_{n,p}$, $u(t) = t^n$ et $v'(t) = (1-t)^p$. Alors $u'(t) = nt^{n-1}$ et $v(t) = -\frac{1}{p+1}(1-t)^{p+1}$. Donc, par intégration par parties,

$$\mathrm{I}_{n,p} = \left[t^n \frac{1}{p+1}(1-t)^{p+1}\right]_0^1 - \int_0^1 nt^{n-1}\frac{(-1)}{p+1}(1-t)^{p+1}dt = \frac{n}{p+1}\mathrm{I}_{n-1,p+1},$$

d'où le résultat.

2. En déduire une expression de $I_{n,p}$ pour tous n et p entiers.

Correction

Je ne fais pas les récurrences, mais on montre par récurrence sur que pour tout n et p, $\mathrm{I}_{n,p} = \frac{n!}{(p+1)(p+2)\dots(p+n)}\mathrm{I}_{0,p+n} = \frac{n!}{(p+1)(p+2)\dots(p+n+1)} = \frac{n!p!}{(p+n+1)!}$.

Exercice 12. ●●● Calculer, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$.

Correction

Effections une IPP, avec $u(x) = x^n$ et $v'(x) = \sqrt{1-x}$. Alors $u'(x) = nx^{n-1}$ et $v(t) = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_n &= \left[x^n\frac{-2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \int_0^1 nx^{n-1}\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}dx \\ &= \frac{2n}{3}(\mathrm{I}_{n-1} - \mathrm{I}_n),\end{aligned}$$

donc $3\mathrm{I}_n = 2n\mathrm{I}_{n-1} - 2n\mathrm{I}_n$, i.e. $\mathrm{I}_n = \frac{2n}{2n+3}\mathrm{I}_{n-1}$. En poursuivant, on obtient

$$\mathrm{I}_n = \frac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n+3)(2n+1)\dots 5}\mathrm{I}_0 = \frac{2^n n!}{(2n+3)(2n+1)\dots 3}.$$

Exercice 13. *Une suite d'intégrales – extrait DS 2020-2021*. ●●○ Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, on note φ_k la fonction

$$\varphi_k : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}^k(t)} \end{array} \right.$$

On admet l'existence de $\varphi_k(x)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$ et pour tout x de $\mathbb{R}$ étant donné que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}^k(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$, pour x fixé.

Correction

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}(t)} = 2\int_0^x \frac{dt}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}} = 2\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+(\mathrm{e}^t)^2} dt \\ &= 2[\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^t)]_0^x = \boxed{2\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^x) - \frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

Tiens, tiens, on reconnaît le gudermannien... souvenirs !
Ensuite, on rappelle que $th' = \dfrac{\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2}{\mathrm{ch}^2} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2}$, donc

$$\varphi_2(x) = \int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}^2(t)} = [\mathrm{th}(t)]_0^x = \mathrm{th}(x).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \varphi_{k+2}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{(k+1)\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + \frac{k}{k+1}\varphi_k(x).$$

Correction

(Étant donnée l'indication, partons de $\varphi_k(x)$) **Soit** k dans $\mathbb{N}^*$. Alors

$$\varphi_k(x) = \int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^k(x)} = \frac{\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{ch}^{k+1}(t)}.$$

Posons $u'(t) = \mathrm{ch}(t)$, alors $u(t) = \mathrm{sh}(t)$, et $v(t) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^{k+1}(t)}$, alors $v'(t) = -(k+$

1)$\dfrac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^{k+2}(t)}$. Donc, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\varphi_k(x) &= \left[\mathrm{sh}(t)\frac{1}{\mathrm{ch}^{k+1}(t)}\right] + \int_0^x \mathrm{sh}(t)(k+1)\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^{k+2}(t)} \\
&= \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + (k+1)\int_0^x \frac{\mathrm{sh}^2(t)}{\mathrm{ch}^{k+2}(t)}dt \\
&= \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + (k+1)\int_0^x \frac{\mathrm{ch}^2(t)-1}{\mathrm{ch}^{k+2}(t)}dt \\
&= \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + (k+1)\int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^{k}(t)}dt - (k+1)\int_0^x \frac{-1}{\mathrm{ch}^{k+2}(t)}dt \\
&= \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + (k+1)\varphi_k(x) - (k+1)\varphi_{k+2}(x),
\end{aligned}$$

donc

$$-k\varphi_k(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} - (k+1)\varphi_{k+2}(x),$$

donc

$$\boxed{\varphi_{k+2}(x) = \frac{1}{k+1}\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + \frac{k}{k+1}\varphi_k(x)}$$

3. En déduire les valeurs de $\varphi_3(x)$ et $\varphi_4(x)$.

Correction

On en déduit que

$$\boxed{\varphi_3(x) = \varphi_{1+2}(x) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} + \mathrm{Arctan}(e^x)} - \frac{\pi}{4},$$

et

$$\boxed{\varphi_4(x) = \frac{1}{3}\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^3(x)} + \frac{2}{3}\mathrm{th}(x).}$$

Étude des fonctions φ_k Dans cette partie, k est un entier naturel non nul fixé.

4. Démontrer que φ_k est impaire.

Correction

Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\varphi_k(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{\mathrm{ch}(t)}.$$

Posons $s=-t$. Alors quand $t=0$, $s=0$ et quand $t=-x$, $s=x$.
Ensuite $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)} = \dfrac{1}{\mathrm{sh}(-s)} = \dfrac{1}{\mathrm{sh}(s)}$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Enfin, $\dfrac{dt}{ds} = -1$ donc $dt = -ds$. Donc

$$\boxed{\varphi_k(-x) = -\int_0^x \frac{ds}{\mathrm{ch}(s)} = -\varphi_k(x).}$$

$\boxed{\text{Donc } \varphi_k \text{ est impaire.}}$

5. On admet la dérivabilité de φ_k. Calculer, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\varphi_k'(x)$ et en déduire le sens de variation de φ_k sur $\mathbb{R}$. En déduire son signe sur $\mathbb{R}$.

Correction

Par définition, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^k(t)}dt$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}^k(x)}$ donc la dérivée de φ_k est $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}^k(x)} \geqslant 0$, positive de $\mathbb{R}$, donc φ_k est croissante sur $\mathbb{R}$.
On vient de voir que φ_k est croissante et $\varphi_k(0) = 0$ donc φ_k est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$.

6. Démontrer que φ_1 et φ_2 ont des limites en $+\infty$, et les déterminer.

Correction

On sait que $\varphi_1 : x \mapsto 2\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^x) - \dfrac{\pi}{2}$. Or, $\mathrm{e}^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\mathrm{Arctan}(y) \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$ donc $\varphi_1(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \pi - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.
De plus, $\varphi_2(x) = \mathrm{th}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'où les deux limites demandées.

7. En utilisant la question 2., démontrer que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $\varphi_k(x)$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$.

Correction

Soit pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_k$ la proposition « $\varphi_k(x)$ converge quand $x \to +\infty$. » Démontrons $(\mathcal{P}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ par récurrence double sur k.
Initialisation. $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont vraies par la question précédente.
Hérédité. Supposons $\mathcal{P}_k$ et $\mathcal{P}_{k+1}$ vraies pour un certain rang k. Alors $\varphi_k(x)$ a une limite quand x tend vers $+\infty$. Or, pour tout x,

$$\varphi_{k+2}(x) = \frac{1}{k+1}\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + \frac{k}{k+1}\varphi_k(x),$$

Or, $\mathrm{sh}(x) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$ et $\mathrm{ch}(x) \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$, donc $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} \leqslant \dfrac{2^{k+1}}{\mathrm{e}^{(k+1)x}}$, donc pour tout $x \geqslant 0$,

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} \leqslant \frac{2^k}{\mathrm{e}^{kx}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

donc, par encadrement, $\dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}^{k+1}(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Comme $\varphi_k(x)$ possède une limite finie quand x tend vers $+\infty$, cela démontre que $\varphi_{k+2}(x)$ possède une limite finie quand x tend vers $+\infty$.
D'où l'hérédité, et le résultat par le principe de récurrence.

On note, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_k = \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_k(x)$.

8. Toujours en utilisant la question 2., démontrer que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_{k+2} = \dfrac{k}{k+1}\mathrm{I}_k$.

Correction

Soit k dans $\mathbb{N}^*$ Par 2., pour tout x,

$$\varphi_{k+2}(x) = \frac{1}{k+1}\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}^{k+1}(x)} + \frac{k}{k+1}\varphi_k(x),$$

Comme on a vu que $\dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}^{k+1}(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $\boxed{\mathrm{I}_{k+2} = \dfrac{k}{k+1}\mathrm{I}_k}$.

9. Soit la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k = k\mathrm{I}_k\mathrm{I}_{k+1}$. Démontrer que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est constante et préciser la valeur de cette constante.

Correction

Soit k dans $\mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (k+1)\mathrm{I}_{k+2}\mathrm{I}_{k+1} \\ &= (k+1)\frac{k}{k+1}\mathrm{I}_k\mathrm{I}_{k+1} \text{ par la question précédente} \\ &= (k+1)\mathrm{I}_{k+1}\mathrm{I}_k = a_k, \end{aligned}$$

$\boxed{\text{donc } (a_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ est constante, égale à } a_1 = 2\mathrm{I}_0\mathrm{I}_1 = \pi.}$

10. Déterminer, pour tout $k \geqslant 1$, les valeurs de I_{2k} et I_{2k+1}.

Correction

Démontrons par récurrence que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{Q}_k$: $\mathrm{I}_{2k} = \dfrac{4^k(k!)^2}{(2k)!(2k)}$ est vraie.
Initialisation. $\mathrm{I}_2 = 1 = \dfrac{4^1(1!)^2}{(2)!(2\times 1)}$, donc l'initialisation est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathcal{Q}_k$ vraie pour un certain rang k. Alors, par la question 8.,

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{2(k+2)} = \mathrm{I}_{2k+2} &= \frac{2k}{2k+1}\mathrm{I}_{2k}\\ &= \frac{2k}{2k+1}\frac{4^k(k!)^2}{(2k)!(2k)}\\ &= \frac{4^k(k!)^2}{(2k+1)!}\\ &= \frac{4(k+1)^2}{(2k+2)(2k+2)}\frac{4^k(k!)^2}{(2k+1)!}\\ &= \frac{4^{k+1}((k+1)!)^2}{(2(k+1))!(2(k+1))},\end{aligned}$$

d'où l'hérédité, et, par le principe de récurrence, le résultat.
Soit alors k dans $\mathbb{N}$. Alors

$$(2k)\mathrm{I}_{2k}\mathrm{I}_{2k+1} = \pi,$$

donc

$$\mathrm{I}_{2k+1} = \frac{\pi}{2k\mathrm{I}_{2k}} = \frac{(2k)!(2k)}{2k4^k(k!)^2}\pi = \boxed{\frac{(2k)!}{4^k(k!)^2}\pi}$$

Exercice 14. ●●○ Notre but est de calculer l'intégrale suivante : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\cos^2(t)}{\cos(2t)}dt$.

1. Montrer que cette intégrale est positive.

Correction

Pour tout x dans $[0, \pi/8]$, $\cos^{2t} \geqslant 0$. Donc $\dfrac{\cos^2(t)}{\cos(2t)} \geqslant 0$, donc $\mathrm{I} \geqslant 0$.

On pose $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\sin^2(t)}{\cos(2t)}dt$.

2. Calculer $\mathrm{I} - J$.

Correction

On calcule

$$\begin{aligned}I - J &= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\cos^2(t)}{\cos(2t)}dt - \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\sin^2(t)}{\cos(2t)}dt\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\cos^2(t) - \sin^2(t)}{\cos(2t)}dt\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\cos(2t)}{\cos(2t)}dt = \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

3. Calculer $\mathrm{I} + J$.

Correction

$$\mathrm{I} + J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\cos^2(t)}{\cos(2t)} dt + \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\sin^2(t)}{\cos(2t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\cos^2(t) + \sin^2(t)}{\cos(2t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{\cos(2t)} dt.$$

Posons maintenant $s = \tan(t)$! Alors

- quand $t = 0$ $s = 0$; quand $t = \dfrac{\pi}{8}$, $\tan(t) = \tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$
- $\dfrac{1}{\cos(2t)} = \dfrac{1+s^2}{1-s^2}$.
- $t = \text{Arctan}(s)$ donc $dt = \dfrac{ds}{1+s^2}$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} + J &= \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{1+s^2}{1-s^2} \frac{ds}{1+s^2} \\
&= \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{ds}{1-s^2} \\
&= \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s}\right) ds \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{1}{1-s} ds + \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{1}{1+s} ds \\
&= -\frac{1}{2}(\ln(2-\sqrt{2}) - \ln(1)) + \frac{1}{2}(\ln(\sqrt{2}) - \ln(1)) \\
&= -\frac{1}{2}\ln((2-\sqrt{2})(\sqrt{2})) \\
&= -\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1).
\end{aligned}$$

4. En déduire la valeur de I.

Correction

On en déduit que $\mathrm{I} = \dfrac{\mathrm{I} - J + \mathrm{I} + J}{2} = \dfrac{\pi}{16} + -\dfrac{1}{4}\ln(\sqrt{2}-1)$.

Exercice 15. ●●○ Soit $\omega = a + ib$ un complexe, (a, b réels). Déterminer une primitive de

$$t \mapsto \frac{1}{t - \omega}.$$

Correction

Écrivons

$$\begin{aligned}\frac{1}{t-\omega} &= \frac{1}{t-a-ib}\\ &= \frac{t-a+ib}{(t-a)^2+b^2}\\ &= \frac{t-a}{(t-a)^2+b^2} + ib\frac{1}{(t-a)^2+b^2}.\end{aligned}$$

Une primitive de $t \mapsto \dfrac{t-a}{(t-a)^2+b^2}$ est

$$\frac{1}{2}\ln((t-a)^2+b^2) = \ln\sqrt{(t-a)^2+b^2} = \ln|t-\lambda|,$$

avec $\lambda = a+ib = \omega$. Reste à déterminer une primitive de $t \mapsto b\dfrac{1}{(t-a)^2+b^2}$. On peut s'en sortir en calculant

$$\int_0^x b\frac{1}{(t-a)^2+b^2}dt,$$

mais ici il y a plus simple si on utilise l'énoncé ! Dérivons $g : t \mapsto \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{t-a}{b}\right)$:

$$\begin{aligned}g'(t) &= \frac{1}{b}\frac{1}{1+\left(\frac{t-a}{b}\right)^2}\\ &= \frac{1}{b}\frac{b^2}{(t-a)^2+b^2}\\ &= \frac{b}{(t-a)^2+b^2}.\end{aligned}$$

d'où le résultat !

Exercice 16. *Lemme de Riemann-Lebesgue*. ●●● Soient a et b deux réels, $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable, de dérivée continue. Montrer que

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt\right| = 0.$$

On pourra effectuer une intégration par parties.

Correction

Exprimons $\displaystyle\int_a^b e^{it\lambda}f(t)dt$ d'une autre manière en effectuant une intégration par parties, avec

$$\begin{aligned}u(t) = f(t),\ u'(t) = f'(t),\\ v'(t) = e^{it\lambda},\ v(t) = \frac{1}{i\lambda}e^{it\lambda}.\end{aligned}$$

On obtient donc, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{it\lambda} f(t)dt &= \left[f(t)\frac{1}{i\lambda}e^{it\lambda}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\frac{1}{i\lambda}e^{it\lambda}dt \\ &= \frac{f(a)e^{ia\lambda}}{i\lambda} - \frac{f(b)e^{ib\lambda}}{i\lambda} - \frac{1}{i\lambda}\int_a^b f'(t)e^{it\lambda}dt.\end{aligned}$$

Maintenant, étant donné que

$$\boxed{\left|e^{i\omega}\right| = 1 \text{ pour tout réel } \omega},$$

on a

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left|\frac{f(a)e^{ia\lambda}}{i\lambda}\right| = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{|f(a)|}{|\lambda|} = 0.$$

De même,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left|\frac{f(b)e^{ib\lambda}}{i\lambda}\right| = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{|f(b)|}{|\lambda|} = 0.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{i\lambda}\int_a^b f'(t)e^{it\lambda}t\right| &\leqslant \frac{1}{|\lambda|}\left|\int_a^b f'(t)e^{it\lambda}dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{|\lambda|}\int_a^b \left|f'(t)e^{it\lambda}\right|dt \\ &\leqslant \frac{1}{|\lambda|}\int_a^b |f'(t)|dt.\end{aligned}$$

Comme f' est continue, $\displaystyle\int_a^b |f'(t)|\,dt$ est un nombre réel fini, et

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{|\lambda|}\int_a^b |f'(t)|\,dt = 0.$$

Donc, par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{i\lambda}\int_a^b f'(t)e^{it\lambda}dt = 0.$$

Finalement, on en déduit que

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b e^{it\lambda}f(t)dt = 0.$$

Indications. Pour cette feuille de TD, quelques indications, mais surtout, ensuite, les réponses brutes des calculs d'intégrale !

8 Voici des changements de variables à poser :

1. $s = \sqrt{t}$

2. $u = \sqrt{x-1}$

3. $s = e^t$
4. $\theta = \sin(x)$
5. Poser $u = \tan(t/2)$ et remarquer que

$$\frac{1}{1+2u-u^2} = -\frac{1}{(u-1-\sqrt{2})\,(u-1+\sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{u-1+\sqrt{2}} - \frac{1}{u-1-\sqrt{2}}\right),$$

(passage délicat)

9 Linéariser le produit de sinus.

10 1.

2. Effectuer le changement de variables $y = a + b - x$.
3.

12 Poser $u(x) = x^n$ et $v'(x) = \sqrt{1-x}$.

14 1. Utiliser **la** propriété du cours qui parle d'intégrales positives.

2. Développer $\cos(2t)$.
3. Poser $s = \tan(t)$.
4. Remarquer que $\mathrm{I} = \dfrac{\mathrm{I} - J + \mathrm{I} + J}{2}$

15 Utiliser la quantité conjuguée au dénominateur, puis faire apparaître ou bien du ln, ou bien de l'arctangente. **Attention !** Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t+i}$ **n'est pas** $t \mapsto \ln|t+i|$!

16 Effectuer une intégration par parties, avec $u(t) = f(t)$ et $v'(t) = e^{it\lambda}$.

Réponses brutes.

6 1. $\dfrac{175}{6}$

2. $\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{6e^{12}}$
3. $-\dfrac{1}{t}$
4. $2\ln(2)^2$
5. $\ln|\ln(t)|$
6. $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
7. $-\dfrac{1}{8}$
8. 0
9. $\tan(t) - t$

7 1. $e^2 + 1$

2. $2(e^t - 1)$
3. $y\ln(1+y^2) - 2y + 2\mathrm{Arctan}(y)$.
4. $s\mathrm{Arcsin}(s) + \sqrt{1-s^2}$.
5. $x\mathrm{sh}(x) - \mathrm{ch}(x)$.
6. $\dfrac{e^2}{5}\sin(1) + \dfrac{2}{5}e^2\cos(1) - \dfrac{2}{5}$.

8 1. $\mathrm{Arctan}(\sqrt{e^3-1}) - \mathrm{Arctan}(\sqrt{e-1})$

2. $\dfrac{\sqrt{y-1}^3}{3} + \sqrt{y-1} - \left(\dfrac{1}{3} + 1\right)$
3. $2\mathrm{Arctan}(e^y) - 2\mathrm{Arctan}(e)$
4. $\dfrac{\pi}{8}$
5. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$

10 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx = \frac{\pi^2}{4}$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

12 $\mathrm{I}_n = \dfrac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n+3)(2n+1)\dots 5}\mathrm{I}_0 = \dfrac{2^n n!}{(2n+3)(2n+1)\dots 3}$

14 $\mathrm{I} = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\ln(2)}{4}$