TD 6
Intégration

1 Exercices corrigés en classe – calculs avancés

NB : comme il y a eu beaucoup d'exercices dans le poly de cours, ces exercices sont difficiles. C'est normal !

Exercice 1. Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$, ...

- en effectuant le changement de variables $t = \tan\dfrac{x}{2}$,
- en écrivant que $\dfrac{1}{\cos(x)} = \dfrac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)}$ (et en faisant éventuellement le changement de variables $y = \sin(x)$ si on ne voit pas d'intégration directe).

Exercice 2. *Lemme de Riemann-Lebesgue*. Soit f une fonction $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a, b]$. Démontrer que, si $\omega \in \mathbb{R}^*$,

$$\int_a^b f(t)\sin(n\omega t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 3. Représenter la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \max(x, t)dt$.

Exercice 4. Démontrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t+x}dt$ est dérivable et déterminer l'expression de sa dérivée.

Exercice 5. À l'aide d'un joli dessin, expliquer pourquoi la suite $\left(\displaystyle\int_0^{4\pi n} \frac{\sin(t)}{t}dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2 Exercices à faire en TD

Exercice 6. *Calculs directs*. ◐○○ - ●◐○ Calculer les intégrales ou primitives suivantes, sans utiliser ni IPP, ni changement de variable.

1. $\displaystyle\int_{-2}^3 (y^2 - y + 4)dy$,
2. $\displaystyle\int_0^2 xe^{-3x^2}dx$,
3. $\displaystyle\int^x \frac{1}{(3t+2)^2}dt$,
4. $\displaystyle\int_1^4 \frac{\ln(t)}{t}dt$,
5. $\displaystyle\int^x \frac{1}{t\ln(t)}dt$,
6. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)dx$,
7. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos(x)dx$,
8. $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{sh}(t)dt$,
9. $\displaystyle\int^x \tan^2(t)dt$,
10. $\displaystyle\int^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\mathrm{Arcsin}(t)}$,
11. $\displaystyle\int^x \frac{\sin(2\theta)}{1+\cos^2(\theta)}d\theta$
12. $\displaystyle\int^x \frac{dt}{\cos^2(t)\tan(t)}$.

Exercice 7. *Intégration par parties*. ●○○ - ●●○ Calculer les intégrales suivantes, en utilisant une intégration par parties.

1. $\displaystyle\int_0^2 te^t dt$,

2. $\displaystyle\int_1^2 \ln \frac{t-1}{t+1} dt$,

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\theta}{\cos^2(\theta)} d\theta$

4. $\displaystyle\int^x t^2 e^t dt$,

5. $\displaystyle\int_0^y \ln(1+x^2) dx$,

6. $\displaystyle\int^x \operatorname{Arcsin}(t) dt$,

7. $\displaystyle\int^x t\operatorname{ch}(t) dt$,

8. $\displaystyle\int_0^1 e^{2t}\cos(t) dt$.

Exercice 8. *Changement de variable*. ●○○ - ●●○ Calculer les intégrales suivantes, en effectuant des changements de variable adéquats.

1. $\displaystyle{}^{x}\!\!\int \frac{dt}{t+\sqrt{t}}$,

2. $\displaystyle\int_2^y \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$, où $y > 1$,

3. $\displaystyle\int_1^y \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} dt$,

4. $\displaystyle\int_{-1}^1 \theta^2\sqrt{1-\theta^2} d\theta$,

5. $\displaystyle\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t)+\cos(t)} dt$,

6. $\displaystyle\int^x \sqrt{e^t-1} dt$.

Exercice 9. *Orthogonalité des fonctions trigonométriques*. ●◐○ Déterminer, en fonction de la valeur de m et n entiers, la valeur de l'intégrale

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt) dt.$$

Exercice 10. ●●○ Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que pour tout x de $[a, b]$, $f(a+b-x) = f(x)$.

1. Interpréter l'égalité en termes de graphe de f.

2. Montrer que

$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

3. Application : calculer

$$\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)} dx.$$

Exercice 11. ●●○ Pour tous entiers naturels n et p on pose

$$I_{n,p} = \int_0^1 t^n(1-t)^p dt.$$

1. Montrer que pour tout n non nul et pour tout p entier,

$$I_{n,p} = \frac{n}{p+1} I_{n-1,p+1}.$$

2. En déduire une expression de $I_{n,p}$ pour tous n et p entiers.

Exercice 12. ●●● Calculer, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x} dx$.

Exercice 13. *Une suite d'intégrales – extrait DS 2020-2021*. ●●○ Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, on note φ_k la fonction

$$\varphi_k : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}^k(t)} \end{array} \right.$$

On admet l'existence de $\varphi_k(x)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$ et pour tout x de $\mathbb{R}$ étant donné que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}^k(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$, pour x fixé.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \varphi_{k+2}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{(k+1)\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + \frac{k}{k+1}\varphi_k(x).$$

3. En déduire les valeurs de $\varphi_3(x)$ et $\varphi_4(x)$.

Étude des fonctions φ_k Dans cette partie, k est un entier naturel non nul fixé.

4. Démontrer que φ_k est impaire.
5. On admet la dérivabilité de φ_k. Calculer, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\varphi_k'(x)$ et en déduire le sens de variation de φ_k sur $\mathbb{R}$. En déduire son signe sur $\mathbb{R}$.
6. Démontrer que φ_1 et φ_2 ont des limites en $+\infty$, et les déterminer.
7. En utilisant la question 2., démontrer que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $\varphi_k(x)$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$.

On note, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_k = \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi_k(x)$.

8. Toujours en utilisant la question 2., démontrer que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_{k+2} = \dfrac{k}{k+1}\mathrm{I}_k$.
9. Soit la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k = k\mathrm{I}_k\mathrm{I}_{k+1}$. Démontrer que $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est constante et préciser la valeur de cette constante.
10. Déterminer, pour tout $k \geqslant 1$, les valeurs de I_{2k} et I_{2k+1}.

Exercice 14. ●●○ Notre but est de calculer l'intégrale suivante : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\cos^2(t)}{\cos(2t)} dt$.

1. Montrer que cette intégrale est positive.

On pose $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\sin^2(t)}{\cos(2t)} dt$.

2. Calculer $\mathrm{I} - J$.
3. Calculer $\mathrm{I} + J$.
4. En déduire la valeur de I.

Exercice 15. ●●○ Soit $\omega = a + ib$ un complexe, (a, b réels). Déterminer une primitive de

$$t \mapsto \frac{1}{t - \omega}.$$

Exercice 16. *Lemme de Riemann-Lebesgue*. ●●● Soient a et b deux réels, $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable, de dérivée continue. Montrer que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \left| \int_a^b f(t)\mathrm{e}^{i\lambda t} dt \right| = 0.$$

On pourra effectuer une intégration par parties.

Indications. Pour cette feuille de TD, quelques indications, mais surtout, ensuite, les réponses brutes des calculs d'intégrale !

8 Voici des changements de variables à poser :

1. $s = \sqrt{t}$
2. $u = \sqrt{x-1}$
3. $s = \mathrm{e}^t$
4. $\theta = \sin(x)$
5. Poser $u = \tan(t/2)$ et remarquer que

$$\frac{1}{1+2u-u^2} = -\frac{1}{\left(u-1-\sqrt{2}\right)\left(u-1+\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{u-1+\sqrt{2}} - \frac{1}{u-1-\sqrt{2}}\right),$$

(passage délicat)

9 Linéariser le produit de sinus.

10
1.
2. Effectuer le changement de variables $y = a + b - x$.
3.

12 Poser $u(x) = x^n$ et $v'(x) = \sqrt{1-x}$.

14
1. Utiliser **la** propriété du cours qui parle d'intégrales positives.
2. Développer $\cos(2t)$.
3. Poser $s = \tan(t)$.
4. Remarquer que $\mathrm{I} = \dfrac{\mathrm{I} - J + \mathrm{I} + J}{2}$

15 Utiliser la quantité conjuguée au dénominateur, puis faire apparaître ou bien du ln, ou bien de l'arctangente. **Attention !** Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t+i}$ **n'est pas** $t \mapsto \ln|t+i|$!

16 Effectuer une intégration par parties, avec $u(t) = f(t)$ et $v'(t) = e^{it\lambda}$.

Réponses brutes.

6
1. $\dfrac{175}{6}$
2. $\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{6\mathrm{e}^{12}}$
3. $-\dfrac{1}{t}$
4. $2\ln(2)^2$
5. $\ln|\ln(t)|$
6. $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
7. $-\dfrac{1}{8}$
8. 0
9. $\tan(t) - t$

7
1. e^2+1
2. $2(e^t-1)$
3. $y\ln(1+y^2)-2y+2\text{Arctan}(y)$.
4. $s\text{Arcsin}(s)+\sqrt{1-s^2}$.
5. $x\text{sh}(x)-\text{ch}(x)$.
6. $\dfrac{e^2}{5}\sin(1)+\dfrac{2}{5}e^2\cos(1)-\dfrac{2}{5}$.

8
1. $\text{Arctan}(\sqrt{e^3-1})-\text{Arctan}(\sqrt{e-1})$
2. $\dfrac{\sqrt{y-1}^3}{3}+\sqrt{y-1}-\left(\dfrac{1}{3}+1\right)$
3. $2\text{Arctan}(e^y)-2\text{Arctan}(e)$
4. $\dfrac{\pi}{8}$
5. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$

10 $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx=\frac{\pi^2}{4}$.

12 $\mathrm{I}_n=\dfrac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n+3)(2n+1)\dots 5}\mathrm{I}_0=\dfrac{2^n n!}{(2n+3)(2n+1)\dots 3}$

14 $\mathrm{I}=\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{\ln(2)}{4}$