TD 7
Équations différentielles

1 Les exercices corrigés en classe

Exercice 1. *Trois calculs*. ●●○ Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y' - y = e^x$ sur $\mathbb{R}$

Correction

On veut résoudre

$$y' - y = e^x. \tag{E_2}$$

On résout d'abord l'équation homogène.

$$y' - y = 0. \tag{E_2^h}$$

L'ensemble des solutions est $\{x \mapsto Ce^x,\ C \in \mathbb{R}\}$.
Ensuite, appliquons la méthode de variation de la constante : cherchons une solution sous la forme $f : x \mapsto g(x)e^x$. Alors on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f \text{ est solution} &\Leftrightarrow f'(x) - f(x) = e^x \\ &\Leftrightarrow g'(x)e^x + g(x)e^x - g(x)e^x = e^x\mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow g'(x)e^x = e^x \\ &\Leftrightarrow g'(x) = 1. \end{aligned}$$

Donc si $f : x \mapsto xe^x$, f est solution particulière de l'équation.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\{x \mapsto xe^x + \lambda e^x,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

(remarque : on voyait que $x \mapsto xe^x$ était une solution particulière)

2. $y' - \ln(x)y = x^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction

Résolvons l'équation homogène, i.e. $y' - \ln(x)y = 0$. Une primitive de $x \mapsto -\ln(x)$ est $x \mapsto -(x\ln(x) - x)$, donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\{x \mapsto \lambda e^{x\ln(x)-x},\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto \lambda x^x e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Cherchons désormais une solution particulière de l'équation de la forme $f : x \mapsto h(x)x^x e^{-x}$. Alors f est solution de l'équation si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ h'(x)x^x e^{-x} = x^x,$$

i.e. $h'(x) = e^x$. Donc $h(x) = e^x$ est solution, donc $x \mapsto x^x$ est solution particulière de l'équation. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

$$x \mapsto x^x + \lambda x^x e^{-x},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. $y'' + 4y = \sin(2x)$.

Correction

L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $x^2 + 4 = 0$, de racines $y = 2i$ et $y = -2i$. Donc les solutions générales réelles de l'équation homogène sont de la forme $y : x \mapsto A\sin(2x) + B\cos(2x)$, avec A et B des réels.
Pour résoudre l'équation avec second membre, proposons les deux méthodes décrites en cours :

(a) principe de superposition : réécrivons-là sous la forme

$$y'' + 4y = \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i}, \tag{E}$$

et appliquons le principe de superposition : une solution particulière de (E) s'écrira comme la somme d'une solution de (E_+) et de (E_-), où

$$y'' + 4y = \frac{e^{2ix}}{2i} \tag{E$_+$}$$

et

$$y'' + 4y = -\frac{e^{-2ix}}{2i}. \tag{E$_-$}$$

Le second membre de (E_+) s'écrit sous la forme $Ke^{\alpha x}$ avec $K = \dfrac{1}{2i}$ et $\alpha = 2i$, racine de l'équation caractéristique. Cherchons alors une solution particulière sous la forme axe^{2ix}, i.e. cherchons a complexe tel que $f : x \mapsto axe^{2ix}$ soit solution de l'équation.

$$f'(x) = ae^{2ix} + 2iaxe^{2ix} = e^{2ix}(2iax + a),$$

et

$$f''(x) = 2iae^{2ix} + (-4ax + 2ia)e^{2ix} = e^{2ix}(-4ax + 4ia).$$

Donc f est solution de (E_+) si et seulement si,

$$e^{2ix}(-4ax + 4ia) - 4(ax + b)e^{2ix} = \frac{e^{2ix}}{2i}, \text{ soit } 4ia = \frac{1}{2i}.$$

c'est-à-dire si et seulement si $a = \dfrac{-1}{8}$. Une solution particulière de (E_+) est donc

$$x \mapsto -\frac{1}{8}xe^{2ix}.$$

Le même genre de calculs donne comme solution particulière de (E_-)

$$x \mapsto -\frac{1}{8}xe^{-2ix}.$$

Donc une solution particulière de (E) est

$$x \mapsto -\frac{1}{8}xe^{2ix} - \frac{1}{8}xe^{-2ix} = -\frac{x}{4}\cos(2x).$$

(b) (+ court !) Considérons simplement l'équation

$$y'' + 4y = e^{2ix} \tag{E'}$$

On cherche alors une solution particulière de (E'), dont on n'aura qu'à prendre la partie imaginaire. On a un second membre de la forme $x \mapsto \lambda e^{\alpha x}$ avec α racine simple de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière $f : x \mapsto \mu x e^{2ix}$. On calcule alors

$$f' : x \mapsto \mu e^{2ix} + 2i\mu x e^{2ix}$$
$$f'' : x \mapsto 4i\mu e^{2ix} - 4\mu x e^{2ix},$$

donc f est solution de l'équation si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 4i\mu e^{2ix} - 4\mu x e^{2ix} + 4\mu x e^{2ix} = e^{2ix},$$

i.e. si et seulement si $\mu = \dfrac{1}{4i}$. Donc une solution particulière de (E') est

$$f : x \mapsto \frac{1}{4i} x e^{2ix} = -\frac{i}{4} x e^{2ix},$$

donc une solution particulière de (E) est $\mathfrak{Im}(f) : x \mapsto -\dfrac{1}{4} x \cos(2x)$.

Donc l'ensemble des solutions de (E) est

$$\{x \mapsto A\sin(2x) + B\cos(2x) - \frac{x}{4}\cos(2x),\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

Exercice 2. *Changement de variables*. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$x^2y'' - xy' - 3y = x^4, \tag{E}$$

que l'on va résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si la fonction $g : t \mapsto f(e^t)$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une certaine équation différentielle linéaire à coefficients constants que l'on précisera.

Correction

Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$. Alors, si $g(t) = f(e^t)$, $f(x) = g(\ln(x))$, bien défini car $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$f'(x) = \frac{1}{x} g'(\ln(x)),$$

et

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} g'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2} g''(\ln(x)),$$

d'où

$$x^2y'' - xy' - 3y = -g'(\ln(x)) + g''(\ln(x)) - g'(\ln(x)) - 3g(\ln(x)),$$

donc
$$g''(\ln(x)) - 2g'(\ln(x)) - 3g(\ln(x)) = x^4.$$
En posant $t = \ln(x)$, on a
$$g''(t) - 2g'(t) - 3g(t) = e^{4t}.$$
Comme ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, on a g solution de
$$y'' - 2y' - 3y = e^{4t}.$$

2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction

- Résolvons l'équation homogène. Son équation caractéristique associée est $x^2 - 2x - 3 = 0$, de discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$, et donc de racines $r_1 = -1$ et $r_2 = 3$. Donc les solutions générales de l'équation homogène sont de la forme
$$t \mapsto Ae^{-t} + Be^{3t},$$
avec A et B des réels.
- Ensuite, comme le second membre est e^{4t}, et que 4 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme ae^{4t}, où a est un réel. a doit vérifier
$$16a - 8a - 3a = 1,$$
soit $a = \frac{1}{5}$. Donc les solutions de l'équation non homogène sont de la forme
$$t \mapsto \frac{e^{4t}}{5} + Ae^{-t} + Be^{3t},$$
avec A, B dans $\mathbb{R}$.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation originale est
$$\{x \mapsto \frac{x^4}{5} + \frac{A}{x} + Bx^3, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

Exercice 3. *Expression de solutions particulières par convolution*. ●●○ Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $\varphi : x \mapsto \int_0^x \sin(x-t)g(t)dt$. Démontrer que φ est dérivable et déterminer une équation différentielle du second ordre vérifiée par φ.
2. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = g$.
3. Soit f une fonction telle que $f'' + f$ est toujours positive. Démontrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) + f(x + \pi)$ est positif.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Exercice 4. ●○○ On veut déterminer les fonctions f deux fois dérivables qui vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x$$

1. Soit f une solution de l'équation. Quelle équation est vérifiée par $g : x \mapsto f(-x)$?

Correction

On remarque que $g'(x) = -f'(-x)$ et $g''(x) = f''(-x)$. Ainsi,

$$g''(x) + g(-x) = f''(-x) + f(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

2. En déduire les équations différentielles vérifiées par les parties paire et impaire de f, et conclure.

Correction

Soient φ et ψ les parties paire et impaire de f. On sait que

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{f(x) + g(x)}{2}.$$

Ainsi, $\varphi''(x) + \dfrac{f''(x) + g''(x)}{2}$, et donc

$$\varphi''(x) + \varphi(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x).$$

De même, $\psi(x) = \dfrac{f(x) - g(x)}{2}$, donc $\psi''(x) = \dfrac{f''(x) - g''(x)}{2}$

$$\psi''(x) - \psi(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x).$$

Résolvons la première équation :

- l'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\mathrm{Vect}(\sin, \cos)$
- $\dfrac{1}{2}\mathrm{ch}$ est une solution particulière

Donc φ est de la forme $\lambda \sin + \mu \cos + \dfrac{1}{2}\mathrm{ch}$. Mais φ est paire donc $\lambda = 0$.
On résout la seconde équation :

- l'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\mathrm{Vect}(\mathrm{sh}, \mathrm{ch})$.
- pour trouver une solution particulière, on remarque que 1 et -1 sont racines de l'équation caractéristique associée à l'équation homogène. On peut chercher une solution comme en cours, mais remarquer que si $h : x \mapsto x\mathrm{sh}(x)$, $h' : x \mapsto \mathrm{sh}(x) + x\mathrm{ch}(x)$ et $h''(x) = 2\mathrm{ch}(x) + x\mathrm{sh}(x)$. Ah, zut, ça ne marche pas, mais presque ! Si on pose $h : x \mapsto \dfrac{1}{2}x\mathrm{ch}(x)$, alors $h' : x \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{ch}(x) + \dfrac{1}{2}x\mathrm{sh}(x)$ et $h'' : x \mapsto \mathrm{sh}(x) + \dfrac{1}{2}x\mathrm{ch}(x)$, donc h est bien solution !

Donc ψ est de la forme $x \mapsto \alpha \text{sh}(x)+\beta \text{ch}(x)+\dfrac{1}{2}x\text{ch}(x)$. Mais ψ est impaire donc $\beta = 0$.
Ainsi, f est de la forme

$$f : x \mapsto \alpha \text{sh}(x) + \mu \cos(x) + \frac{1}{2}x\text{ch}(x) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x.$$

Synthèse. En posant $f : x \mapsto \alpha \text{sh}(x) + \mu \cos(x) + \dfrac{1}{2}x\text{ch}(x) + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$, on calcule

$$f' : x \mapsto \alpha \text{ch}(x) - \mu \sin(x) + \frac{1}{2}\text{ch}(x) + \frac{1}{2}x\text{sh}(x) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x,$$

et

$$f'' : x \mapsto \alpha \text{sh}(x) - \mu \cos(x) + \text{sh}(x) + \frac{1}{2}x\text{ch}(x) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$$

donc, si $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f''(x) + f(-x) &= \alpha \text{sh}(x) - \mu \cos(x) + \text{sh}(x) + \frac{1}{2}x\text{ch}(x) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + \alpha \text{sh}(-x) + \mu \cos(-x) + \frac{1}{2}(-x)\text{ch}(-x) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} \\ &= \text{sh}(x) + \text{ch}(x) = \mathrm{e}^x, \end{aligned}$$

donc f est bien solution. Youpi.

Exercice 5. Soient a et b deux fonctions continues et T-périodiques sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si $\displaystyle\int_0^T a(t)dt \neq 0$, alors l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ admet une unique solution T-périodique.

Correction

Résolvons l'équation différentielle.
Équation homogène. On sait que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est l'ensemble des $\{t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-A(t)},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, où $A(t) = \displaystyle\int_0^t a(s)ds$.
Recherche d'une solution particulière. On cherche une solution particulière sous la forme $t \mapsto h(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$. On sait qu'une telle fonction est solution si, et seulement si

$$h'(t) = \mathrm{e}^{A(t)}b(t),$$

donc $t \mapsto \mathrm{e}^{-A(t)} \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{A(s)}b(s)ds$ est une solution particulière de l'équation différentielle.
Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

$$\{t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} + \mathrm{e}^{-A(t)} \int_0^t \mathrm{e}^{A(s)}b(s)ds,\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Résolvons alors notre problème.
Analyse. Soit f une solution T-périodique de l'équation. Alors on dispose de λ tel que

$$f : t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} + \mathrm{e}^{-A(t)} \int_0^t \mathrm{e}^{A(s)}b(s)ds.$$

Mais $f(T) = f(0)$ donc $\lambda e^{-A(T)} + e^{-A(T)} \displaystyle\int_0^T e^{A(s)} b(s) ds = \lambda$. **Or,** $e^{-A(T)} \neq 1$, donc

$$\lambda = \frac{1}{1 - e^{-A(T)}} e^{-A(T)} \int_0^T e^{A(s)} b(s) ds.$$

D'où l'unicité de la fonction.

Synthèse. Posons $\lambda = \dfrac{1}{1 - e^{-A(T)}} e^{-A(T)} \displaystyle\int_0^T e^{A(s)} b(s) ds$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$f(t+T) = \lambda e^{-A(t+T)} + e^{-A(t+T)} \int_0^{t+T} e^{A(s)} b(s) ds.$$

MAIS on sait que $A(t) = \displaystyle\int_0^t a(s) ds$. Comme a est T-périodique, $A(t+T) = \displaystyle\int_0^t a(s) ds + \int_t^{t+T} a(s) ds = A(t) + A(T)$ (l'intégrale d'une fonction périodique sur une période est l'intégrale de 0 à T). Ainsi,

$$e^{-A(t+T)} = e^{-A(t)} e^{-A(T)}.$$

De plus,

$$\int_0^{t+T} e^{A(s)} b(s) ds = \int_0^T e^{A(s)} b(s) ds + \int_T^{t+T} e^{A(s)} b(s) ds.$$

Dans la seconde intégrale, on fait le changement de variables $u = s - T$. Ainsi,

$$\int_T^{t+T} e^{A(s)} b(s) ds = \int_0^t e^{A(u+T)} b(u+T) du = \int_0^t e^{A(u)} e^{A(T)} b(u) du.$$

Donc, en rassemblant les choses,

$$\begin{aligned} f(t+T) &= \lambda e^{-A(t)} e^{-A(T)} + e^{-A(t)} e^{-A(T)} \left(\int_0^T e^{A(s)} b(s) ds + e^{A(T)} \int_0^t e^{A(s)} b(s) ds \right) \\ &= \lambda e^{-A(t)} e^{-A(T)} + e^{-A(t)} e^{-A(T)} \int_0^T e^{A(s)} b(s) ds + e^{-A(t)} \int_0^t e^{A(s)} b(s) ds \end{aligned}$$

Mais $\lambda e^{-A(T)} = \lambda - e^{-A(T)} \displaystyle\int_0^T e^{A(s)} b(s) ds$, donc

$$\begin{aligned} f(t+T) &= \lambda e^{-A(t)} - e^{-A(t)} e^{-A(T)} \int_0^T e^{A(s)} b(s) ds + e^{-A(t)} e^{-A(T)} \int_0^T e^{A(s)} b(s) ds + e^{-A(t)} \int_0^t e^{A(s)} b(s) ds \\ &= \lambda e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_0^t e^{A(s)} b(s) ds. \end{aligned}$$

Donc f est T-périodique ! D'où le résultat !

2. Que se passe-t-il si a est de valeur moyenne nulle ?

Correction

Si a est de valeur moyenne nulle, alors, dans notre analyse, f est périodique seulement si $\lambda e^{-A(T)} + e^{-A(T)} \displaystyle\int_0^T e^{A(s)} b(s) ds = \lambda$, i.e., comme $A(T) = A(0) = 0$,

$$\int_0^T e^{A(s)} b(s) ds = 0.$$

Il s'agit donc d'une CN pour que f soit périodique.
Il n'est pas compliqué de vérifier que si une telle condition est vérifiée, toutes les solutions de l'équation différentielle sont périodiques !

2 Les exercices à faire en TD

Plan de travail

- pour les **calculs classiques**, travailler les exercices, 6, 8.
- pour des **calculs plus originaux**, travailler les exercices 9 et 10
- pour les **changements de fonction inconnue ou de variable** dans les équations différentielles, regarder les exercices 11 (un changement de fonction inconnue au lieu d'un changement de variables, exercice très intéressant !) et 13 (prolongement de l'exercice 2) ou 14 (histoire de faire un autre changement de variables).
- des méthodes dites d'**abaissement de l'ordre** (qui passent d'un ordre élevé à un ordre raisonnable) : regarder les exercices 12 et 15.
- pour les **équations fonctionnelles**, regarder l'exercice 18 ou le 17.
- l'exercice 20 est d'un genre un peu différent, plus théorique

Exercice 6. *Équations du premier ordre*. ●◐○ Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle indiqué. Si aucune condition initiale n'est donnée, donner la forme générale des solutions.

1. $2y' - 3y = 0$ sur $\mathbb{R}$
2. $xy' - ay = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
3. $y' - 2y = \sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. $(x^2+1)y' + 2xy + 1 = 0$ sur $\mathbb{R}$.
5. $y' + y = \mathrm{Arctan}(e^x)$ sur $\mathbb{R}$.
6. $(x+i)y' + y = 1 + 2\mathrm{Arctan}(x)$ sur $\mathbb{R}$.
7. $x(x+4)y' + 2(x-2)y = 1$ sur ? ?
8. $y' - \frac{y}{x} = \sqrt{1+\ln(x)}$ sur $[1/e, +\infty[$.
9. $y' + y = |x|$ sur $\mathbb{R}$.
10. $xy' - 2y = x^3\sin(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
11. $\begin{cases} y' + y = x + 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$.
12. $\begin{cases} y' + 2y = 0, \\ y(2) = 0. \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$.
13. $\begin{cases} y' + 2xy = e^{x-x^2}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$.
14. $\begin{cases} y' + x(y+1) = 0, \\ y(0) = 0. \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$.

Correction

1. L'ensemble des solutions de $2y' - 3y = 0$ est $\{x \mapsto Ce^{\frac{3}{2}x},\ C \in \mathbb{R}\}$.
2. - Sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto x$ ne s'annule pas, donc l'équation est équivalente à
$$y' - \frac{a}{x}y = 0,$$
d'ensemble de solutions $\{x \mapsto \lambda e^{a\ln(x)} = \lambda x^a,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   - Sur $\mathbb{R}_-^*$, le raisonnement s'adapte et l'ensemble des solutions est $\{x \mapsto \lambda e^{a\ln(-x)} = \lambda(-x)^a,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. solution générale est $x \mapsto Ce^{a\ln(-x)}$, avec $C \in \mathbb{R}$.
3. Pour résoudre $y' - 2y = \sin(2x)$, on sait que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est
$$\{x \mapsto \lambda e^{2x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

On cherche alors une solution particulière de l'équation sous la forme $f : x \mapsto g(x)\mathrm{e}^{2x}$ où $g \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On a alors l'équivalence

$$f \text{ solution de l'équation} \Leftrightarrow g'(x)\mathrm{e}^{2x} = \sin(2x) \Leftrightarrow g'(x) = \mathrm{e}^{-2x}\sin(2x).$$

Pour en déterminer simplement des primitives, écrivons $\sin(2x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2ix} - e^{-2ix}}{2i}$, donc

$$\mathrm{e}^{-2x}\sin(2x) = \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{2(i-1)x} - \mathrm{e}^{-2(i+1)x}).$$

Une primitive de cette fonction est

$$x \mapsto \frac{1}{2i}\left(\frac{\mathrm{e}^{2(i-1)x}}{2(i-1)} + \frac{\mathrm{e}^{-2(i+1)x}}{2(i+1)}\right).$$

On peut réécrire

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i}\left(\frac{\mathrm{e}^{2(i-1)x}}{2(i-1)} + \frac{\mathrm{e}^{-2(i+1)x}}{2(i+1)}\right) &= \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{4i}\left(\frac{\mathrm{e}^{2ix}}{i-1} + \frac{\mathrm{e}^{-2ix}}{i+1}\right)\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{4i}\left(-\frac{\mathrm{e}^{2ix}}{1-i} + \frac{\mathrm{e}^{-2ix}}{i+1}\right)\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{4i}\left(\frac{\mathrm{e}^{-2ix}}{i+1} - \frac{\mathrm{e}^{2ix}}{1-i}\right).
\end{aligned}$$

Ensuite, on utilise les quantités conjuguées pour écrire convenablement le tout.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{4i}\left(\frac{\mathrm{e}^{-2ix}}{i+1} - \frac{\mathrm{e}^{2ix}}{1-i}\right) &= \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{4i}\left(\frac{\mathrm{e}^{-2ix}(1-i)}{(i+1)(1-i)} - \frac{\mathrm{e}^{2ix}(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{4i}\left(\frac{\mathrm{e}^{-2ix}(1-i)}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2ix}(1+i)}{2}\right)\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{8i}\left(\mathrm{e}^{-2ix} - \mathrm{e}^{2ix} - i(\mathrm{e}^{-2ix} + \mathrm{e}^{2ix})\right)\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{8i}\left(\mathrm{e}^{-2ix} - \mathrm{e}^{2ix}\right) - \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{8}(\mathrm{e}^{-2ix} + \mathrm{e}^{2ix})\\
&= -\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{4}(\sin(2x) + \cos(2x)).
\end{aligned}$$

Donc $g : x \mapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{4}(\sin(2x) + \cos(2x))$ convient, donc

$$f : x \mapsto -\frac{1}{4}(\sin(2x) + \cos(2x))$$

est une solution particulière de l'équation. Donc l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

$$\left\{x \mapsto -\frac{1}{4}(\sin(2x) + \cos(2x)) + \lambda\mathrm{e}^{-2x},\ \lambda \in \mathbb{K}\right\}.$$

4. Pour tout x réel, $x^2+1 \neq 0$, donc l'équation est équivalente à

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}y + \frac{1}{1+x^2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = -\frac{1}{1+x^2}$$

- Résolvons d'abord l'équation homogène :

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = 0.$$

  Les solutions sont de la forme $C\mathrm{e}^{-\Lambda(x)}$, où Λ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$. Prenons $\Lambda(x) = \ln(1+x^2)$. Donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto \frac{\lambda}{1+x^2},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

- Pour résoudre l'équation générale, cherchons une solution particulière de la forme $f : x \mapsto \dfrac{g(x)}{1+x^2}$ avec $g \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Alors f est solution de l'équation si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -1.$$

  Donc une solution particulière de l'équation différentielle est :

$$x \mapsto \frac{-x}{1+x^2}$$

  Donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\left\{x \mapsto \frac{-x}{1+x^2} + \frac{\lambda}{1+x^2},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

5. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-x},\ \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

On cherche une solution particulière sous la forme $f : x \mapsto g(x)\mathrm{e}^{-x}$. Alors f est solution si et seulement si $g'(x) = \mathrm{e}^x \mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^x)$.
Cherchons donc à calculer

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^x)dx.$$

Nous allons effectuer un changement de variables :

- Posons $u = \mathrm{e}^x$. Alors $x = \ln(u)$.
- $\mathrm{e}^x\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^x) = u\mathrm{Arctan}(u)$.
- $\dfrac{dx}{du} = \dfrac{1}{u}$ donc $dx = \dfrac{du}{u}$.

Donc
$$\int e^x \mathrm{Arctan}(e^x)dx = \int u\mathrm{Arctan}(u)\frac{du}{u} = \int \mathrm{Arctan}(u)du.$$
Maintenant, faisons une IPP en posant $f'(u) = 1$, $g(u) = \mathrm{Arctan}(u)$, donc $f(u) = u$ et $g'(u) = \dfrac{1}{1+u^2}$. Donc
$$\begin{aligned}\int \mathrm{Arctan}(u)du &= u\mathrm{Arctan}(u) - \int \frac{u}{1+u^2}du\\ &= u\mathrm{Arctan}(u) - \frac{1}{2}\ln(1+u^2).\end{aligned}$$
Donc, en remplaçant u par e^x, une primitive de $x \mapsto e^x\mathrm{Arctan}(e^x)$ est $x \mapsto e^x\mathrm{Arctan}(e^x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+e^{2x})$.
Donc une solution particulière de l'équation avec second membre est
$$x \mapsto e^{-x}\left(e^x\mathrm{Arctan}(e^x) - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})\right) = \mathrm{Arctan}(e^x) - \frac{1}{2}e^{-x}\ln(1+e^{2x}).$$
Donc l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est
$$\left\{\mathrm{Arctan}(e^x) - \frac{1}{2}e^{-x}\ln(1+e^{2x}) + \lambda e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

6. L'équation est
$$y' + \frac{1}{x+i}y = \frac{1}{x+i}\left(1+2\mathrm{Arctan}(x)\right)$$
L'équation homogène associée est $(x+i)y' + y = 0$, i.e. $y' + \dfrac{1}{x+i}y = 0$. Si l'on essaie de chercher une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x+i}$, cela devient vraiment horrible ! En revanche, on remarque que $x \mapsto \dfrac{1}{x+i}$ est solution de l'équation homogène :) Donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est
$$x \mapsto \frac{\lambda}{x+i},\ \lambda \in \mathbb{C}.$$
Maintenant, on cherche une solution de l'équation non homogène sous la forme
$$x \mapsto$$

7. $x(x+4)y' + 2(x-2)y = 1$ sur ? ?

8. On remarque que $x \mapsto x$ est solution de l'équation homogène, donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\{x \mapsto \lambda x,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
On cherche ensuite une solution particulière sous la forme $f : x \mapsto g(x).x$ où $g \in \mathcal{D}^1([e, +\infty[, \mathbb{R})$. Alors f est solution si et seulement si
$$g'(x).x = \sqrt{\ln(x)+1},\ \text{i.e. } g'(x) = \frac{\sqrt{1+\ln(x)}}{x}.$$

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+\ln(x)}}{x}$ est $x \mapsto \dfrac{2}{3}\left(1+\ln(x)\right)^{\frac{3}{2}}$. Donc une solution particulière de l'équation est

$$f : x \mapsto x\frac{2}{3}\left(1+\ln(x)\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\left\{x\frac{2}{3}\left(1+\ln(x)\right)^{\frac{3}{2}} + \lambda x,\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

9. Sur $\mathbb{R}_+^*$, x ne s'annule pas, on réécrit donc l'équation sous la forme

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2\sin(x).$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto \lambda e^{2\ln(x)},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \mapsto \lambda x^2,\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

On cherche alors une solution particulière sous la forme $f : x \mapsto g(x)x^2$. Alors f est solution de l'équation si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = \sin(x),$$

donc $g : x \mapsto -\cos(x)$, convient, donc une solution particulière de l'équation est $x \mapsto -\cos(x)x^2$. Donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\left\{x \mapsto -\cos(x)x^2 + \lambda x^2,\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

10. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\{x \mapsto \lambda e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

On cherche une solution particulière sous la forme $f : x \mapsto g(x)e^{-x}$. Alors f est solution si et seulement si $g'(x) = e^x|x|$.
On cherche donc

$$\int_0^x |t|e^t dt.$$

Remarque : ici, je préfère écrire une primitive à l'aide d'une intégrale avec des bornes, car il faudra distinguer les cas x positif et x négatif.

- si $x \geqslant 0$,
$$\int_0^x |t|e^t dt = \int_0^x te^t dt = [(t-1)e^t]_0^x = (x-1)e^x + 1.$$
- si $x \leqslant 0$,
$$\int_0^x |t|e^t dt = -\int_0^x te^t dt = [(1-t)e^t]_0^x = (1-x)e^x - 1.$$

Posons
$$g : x \mapsto \begin{cases} (1-x)e^x - 1 \text{ si } x \leqslant 0 \\ (x-1)e^x + 1 \text{ si } x \geqslant 0. \end{cases}$$
Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Le seul problème pourrait être en 0, mais
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^x + 1 - e^x}{x} \qquad = \lim_{x\to 0^+} e^x + \frac{1-e^x}{x}.$$
Or, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-e^x}{x} = -e^0 = -1$, en reconnaissant un taux de variation. Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 1-1 = 0$. De même,
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-xe^x - 1 + e^x}{x} \qquad = \lim_{x\to 0^+} -e^x + \frac{e^x-1}{x} \\ &= 1-1 = 0.\end{aligned}$$
Donc g est dérivable en 0, de dérivée égale à $x \mapsto |x|e^x$.
Donc une solution particulière de l'équation différentielle est
$$f : x \mapsto e^{-x} g(x) = \begin{cases} (1-x) - e^{-x} \text{ si } x \leqslant 0 \\ (x-1) + e^x \text{ si } x \geqslant 0. \end{cases}$$
Donc l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est $f + \mathrm{Vect}(x \mapsto e^{-x})$.

11. On remarque que la fonction nulle est solution donc la solution de ce problème de Cauchy est la fonction nulle !

12. On raisonne en trois étapes :

- L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + y = 0$ est $\{x \mapsto Ce^{-x},\ C \in \mathbb{R}\}$.
- Cherchons une solution particulière de $y'+y = x+1$ sous la forme $f : x \mapsto g(x)e^{-x}$ où $g \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On a l'équivalence suivante
$$f \text{ est solution} \Leftrightarrow g'(x)e^{-x} = x+1 \Leftrightarrow g'(x) = xe^x + e^x.$$
Si on ne le voit pas directement, pour déterminer une primitive de xe^x, on calcule $\int xe^x dx$. En posant $u(x) = t$, $v'(x) = e^x$, $u'(x) = 1$, $v(x) = e^x$, donc $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x = (x-1)e^x$. Donc une primitive de xe^x est $(x-1)e^x$. Donc une primitive de $xe^x + e^x$ est xe^x.
Donc $f : x \mapsto x$ est une solution particulière de l'équation (attention à ne pas oublier de multiplier la fonction $x \mapsto xe^x$ par e^{-x}.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation est
$$\{x \mapsto x + \lambda e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$
- Soit maintenant f une solution du problème de Cauchy. On dispose de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto x + \lambda e^{-x}$. Comme $f(0) = 0$, $\lambda = 0$, donc, par existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy, $f : x \mapsto x$.

13. On résout cette équation en trois étapes :

- L'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\{x \mapsto \lambda e^{-x^2}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- On utilise ensuite la méthode de variation de la constante. Cherchons une solution particulière f sous la forme $f : x \mapsto g(x)e^{-x^2}$. Alors f est solution si, et seulement si
$$g'(x)e^{-x^2} = e^{x-x^2},$$
soit $g'(x) = e^x$, donc $f : x \mapsto e^{x-x^2}$ est solution particulière de l'équation.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation est
$$\{x \mapsto e^{x-x^2} + \lambda e^{-x^2},\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$
- Soit maintenant f solution du problème de Cauchy. On dispose alors de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{x-x^2} + \lambda e^{-x^2}.$$
Or, $f(0) = 0$, donc $1 + \lambda = 0$, donc $\lambda = -1$, donc, par existence et unicité de la solution à un problème de Cauchy, l'unique solution du problème est
$$x \mapsto (e^x - 1)e^{-x^2}.$$

14. Ici, on pourrait réécrire $y' + x(y + 1) = 0$ sous la forme $y' + xy = -x$. Mais on peut faire un petit raccourci, et faire un changement de fonction inconnue $z = y + 1$. Alors $z' = y'$, donc $z' + xz = 0$! Donc la forme générale de z est
$$z : x \mapsto Ce^{-\frac{x^2}{2}},\ C \in \mathbb{R}.$$
Donc l'ensemble des solutions de l'équation de départ est
$$\{x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}} + 1,\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$
Soit maintenant f solution du problème de Cauchy. On dispose de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$f : x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}} + 1$$
Or, $f(0) = 0$, donc $\lambda + 1 = 0$, donc $\lambda = -1$, donc, par existence et unicité de la solution à un problème de Cauchy, l'unique solution du problème est
$$f : x \mapsto 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Exercice 7. Résoudre l'équation suivante $y' = 1 + y^2$ (sur un intervalle I à déterminer !)

Correction

On va résoudre à la physicienne ! Soit y une solution réelle de l'équation. Alors
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{y'(x)}{1 + y(x)^2} = 1,$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

donc, en intégrant entre x_0 et x,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{1+y(t)^2} dt = x - x_0,$$

donc

$$\operatorname{Arctan}(y(x)) = \operatorname{Arctan}(y(x_0)) + x - x_0,$$

donc

$$y(x) = \tan(\operatorname{Arctan}(y(x_0)) + x - x_0).$$

Donc y est de la forme $x \mapsto \tan(c+x)$, où $c \in \mathbb{R}$.
On peut donc résoudre cette équation sur tout intervalle ouvert sur lequel $x \mapsto \tan(c+x)$ est défini.

Exercice 8. *Équations du second ordre à coefficients constants*. ●◐○ Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$. Si aucune condition initiale n'est donnée, donner la forme générale des solutions.

1. $y'' + y = 0$

2. $y'' - 3y' + 2y = 0$.

3. $y'' - 2y + y = 0$.

4. $y'' + 2y' + y = e^x$.

5. $4y'' + y = 5\cos\dfrac{x}{2}$.

6. $y'' - 2y' + 2y = \cos(x)\operatorname{ch}(x)$.

7. $\begin{cases} y'' + y' - 2y = \sin(x), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} y'' + 5y' + 4y = e^{-x}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

Correction

1. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est $x^2 + 1 = 0$, de racines $\pm i$. Donc l'ensemble des solutions **réelles** de l'équation est

$$\{x \mapsto A\sin(x) + B\cos(x), (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

2. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

de discriminant égal à $9 - 8 = 1$, donc de racines réelles

$$r_1 = 1 \text{ et } r_2 = 2.$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\{x \mapsto Ae^x + Be^{2x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

3. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est

$$x^2 - 2x + 1,$$

de racine double 1. Donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\{x \mapsto (Ax+B)\mathrm{e}^x, (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$$

4. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle homogène est

$$x^2 + 2x + 1,$$

de racine double $r = 1$. Donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\{x \mapsto (Ax+B)\mathrm{e}^{-x},\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Ensuite, le second membre est de la forme $\mathrm{e}^{\alpha x}$, avec $\alpha = 1 \neq r$. Donc une solution particulière de l'équation sera de la forme $C\mathrm{e}^x$. Si $y(x) = C\mathrm{e}^x$, l'équation devient

$$C\mathrm{e}^x + 2C\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x,$$

donc $C = \dfrac{1}{4}$.
Conclusion : la solution générale de l'équation est de la forme

$$x \mapsto \frac{1}{4}\mathrm{e}^x + (Ax+B)\mathrm{e}^{-x},$$

avec A et B des réels.

5. TODO

6. TODO

7. On procède en trois étapes.

- On résout l'équation sans second membre, $y'' + y' - 2y = 0$. L'équation caractéristique est $x^2 + x - 2 = 0$, de discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$. Les deux racines sont $r_1 = -2$ et $r_2 = 1$, donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\{x \mapsto A\mathrm{e}^{-2x} + B\mathrm{e}^x,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- Pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre, on résout

$$y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^{ix} \tag{1}$$

Le second membre de l'équation s'écrit sous la forme $\lambda\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec $\alpha = i$, qui n'est pas racine de l'équation caractéristique. Cherchons alors une solution particulière sous la forme $f : x \mapsto a\mathrm{e}^{ix}$ avec $a \in \mathbb{C}$.
On a donc, pour tout x réel,

$$f''(x) + f'(x) - 2f(x) = (-a + ia - 2a)\mathrm{e}^{ix} = a(i-3)\mathrm{e}^{ix}.$$

Donc f est solution de l'équation si et seulement si $a = \dfrac{1}{(i-3)} = -\dfrac{i+3}{10}$.
Donc une solution particulière de l'équation précédente est $x \mapsto -\dfrac{i+3}{10}\mathrm{e}^{ix}$, donc une solution particulière de l'équation avec second membre égal à $\sin(x)$ est la partie imaginaire de la fonction précédente, i.e.

$$x \mapsto -\frac{1}{10}\cos(x) - \frac{3}{10}\sin(x)$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation générale est

$$\left\{x \mapsto A\mathrm{e}^{-2x} + B\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{10}\cos(x) - \frac{3}{10}\sin(x), (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

- Détermination de la solution du problème de Cauchy. Soit f une solution du problème. Alors on dispose de $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$f : x \mapsto A\mathrm{e}^{-2x} + B\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{10}\cos(x) - \frac{3}{10}\sin(x).$$

On sait que $f(0) = 0$, donc

$$A + B - \frac{1}{10} = 0.$$

De plus, $f'(0) = 1$, donc

$$-2A + B - \frac{3}{10} = 1.$$

On doit donc résoudre

$$\begin{cases} A + B = \dfrac{1}{10} \\ -2A + B = \dfrac{13}{10}. \end{cases}$$

$L_1 - L_2$ donne $3A = -\frac{12}{10} = -\frac{6}{5}$, donc $A = -\frac{2}{5}$. Donc $B = \frac{1}{10} - A = \frac{1}{2}$.
Finalement, par existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy, la solution est :

$$f : x \mapsto -\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{10}\cos(x) - \frac{3}{10}\sin(x).$$

8. Faisons de même qu'au point précédent.

- On résout l'équation sans second membre, $y'' + 5y' + 4y = 0$. L'équation caractéristique est $x^2 + 5x + 4 = 0$, de discriminant $\Delta = 25 - 16 = 9$. Les deux racines sont $r_1 = -4$ et $r_2 = -1$, donc la forme générale des solutions de l'équation est

$$x \mapsto A\mathrm{e}^{-4x} + B\mathrm{e}^{-x},$$

où A et B sont des réels.

- L'équation avec second membre s'écrit sous la forme $\lambda\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec $\alpha = -1$, qui est racine simple de l'équation caractéristique. Cherchons alors une solution particulière sous la forme $f : x \mapsto ax\mathrm{e}^{2ix}$ où $a \in \mathbb{C}$.
On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = a\mathrm{e}^{-x} - ax\mathrm{e}^{-x} = (-ax + a)\mathrm{e}^{-x},$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -a\mathrm{e}^{-x} - (-ax + a)\mathrm{e}^{-x} = (ax - 2a)\mathrm{e}^{-x}.$$

On a donc, pour tout x dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f''(x) + 5f'(x) + 4f(x) &= (ax - 2a)\mathrm{e}^{-x} + 5(-ax + a)\mathrm{e}^{-x} + 4(ax)\mathrm{e}^{-x} \\ &= \mathrm{e}^{-x}(-2a + 5a) = 3a\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

On veut donc $3a = 1$, donc $a = \frac{1}{3}$ convient. Donc

$$x \mapsto \frac{x}{3}e^{-x}$$

est une solution particulière de l'équation générale.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\{x \mapsto Ae^{-4x} + \left(B + \frac{x}{3}\right)e^{-x}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- Détermination de la solution du problème de Cauchy. SOit f une solution du problème. Alors on dispose de $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$f : x \mapsto Ae^{-4x} + \left(B + \frac{x}{3}\right)e^{-x},$$

avec A et B réels. On sait que $f(0) = 0$, donc

$$A + B = 0.$$

De plus, $f'(0) = 1$, donc

$$-4A - B + \frac{1}{3} = 1.$$

On doit donc résoudre

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -4A - B = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Donc $B = -A = \frac{2}{9}$.
Finalement, par existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy, la solution est

$$f : x \mapsto \frac{2}{9}\left(\left(1 + \frac{3}{2}x\right)e^{-x} - e^{-4x}\right).$$

Exercice 9. ●●○ Résoudre l'équation $y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}$ en cherchant une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2 fois une exponentielle.

Correction

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle homogène est

$$x^2 + 3x + 2 = 0,$$

de racines -1 et -2. Les solutions générales de l'équation homogène sont donc de la forme

$$x \mapsto Ae^{-x} + Be^{-2x},$$

avec A et B des réels.
Le second membre est de la forme $P(x)e^{\alpha x}$ avec $P(x) = x$ et $\alpha = -1$. α est racine simple de l'équation caractéristique, donc, en adaptant le raisonnement vu en cours, on recherche une

solution particulière sous la forme $Q(x)e^{\alpha x}$, avec $\deg(Q) = \deg(P)+1 = 2$ On recherche donc une solution particulière sous la forme

$$y : x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{-x},$$

avec a, b et c trois réels à déterminer. On calcule

$$y'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + cx)e^{-x} = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x},$$

et

$$y''(x) = (-2ax+2a-b)e^{-x}-(-ax^2+(2a-b)x+b-c)e^{-x} = (ax^2+(b-4a)x+2a-2b+c)e^{-x}.$$

Donc

$$\begin{aligned} y'' + 3y' + 2y = e^{-x} \big(&ax^2 + (b - 4a)x + 2a - 2b + c + 3(-ax^2 + (2a - b)x + b - c) \\ &+2(ax^2 + bx + c)\big) \\ = e^{-x} &((b - 4a + 6a - 3b + 2b)x - 2b + c + 3b - 3c + 2c + 2a) \\ = e^{-x}&(2ax + b + 2a). \end{aligned}$$

On veut $y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}$, donc il suffit de poser $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -1$ et $c = 0$. Une solution particulière de l'équation est $x \mapsto \left(\dfrac{1}{2}x^2 - x\right) e^{-x}$.
Les solutions de l'équation générale sont donc de la forme

$$x \mapsto \left(\frac{1}{2}x^2 + -x + A\right) e^{-x} + Be^{-2x},$$

avec A et B des réels.

Exercice 10. ●●○ Résoudre le système d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases} y' + 2y = z \\ z' + 3z = 2y + 1 \end{cases}$$

On considèrera, si y et z sont deux solutions de l'équation, $f = y+\omega z$ avec ω un nombre complexe, ou on fera une méthode par substitution.

Correction

Deux méthodes donc

1. La méthode « astucieuse », en cherchant à faire en sorte qu'une combinaison linéaire de y et ω vérifie une équation simple. Posons $f = y+\omega z$, avec ω un complexe à déterminer plus tard. Essayons de trouver une équation différentielle vérifiée par f :

$$f' = y' + \omega z' = z - 2y - 3\omega z + 2\omega y + \omega = y(2\omega - 2) + \omega z \left(\frac{1}{\omega} - 3\right) + \omega.$$

On veut avoir $f' = \alpha f + \omega$, donc il faut que

$$2\omega - 2 = \frac{1}{\omega} - 3,$$

c'est-à-dire que
$$2\omega^2+\omega-1=0.$$
Le discriminant est alors $\Delta=1+8=9$, d'où deux racines $\omega_1=-1$ et $\omega_2=\frac{1}{2}$. Posons alors $f=y-z$ et $g=y+\frac{1}{2}z$. Alors
$$\begin{cases} f'=-4f-1 \\ g'=-g+\frac{1}{2} \end{cases}$$
Donc $f(x)=C\mathrm{e}^{-4x}-\frac{1}{4}$, $g(x)=K\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}$, K, C réels.
Donc
$$\begin{aligned} y&=\frac{f+2g}{3}=\frac{C}{3}\mathrm{e}^{-4x}+\frac{2K}{3}\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{4} \\ z&=\frac{2}{3}(g-f)=\frac{2}{3}K\mathrm{e}^{-x}-\frac{2C}{3}\mathrm{e}^{-4x}+\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. La méthode plus standard ! Soit (y,z) un couple de solutions de l'équation. Alors, en substituant l'expression de z ($z=y'+2y$) dans la deuxième équation, $z'+3z=2y+1$, on obtient
$$(y'+2y)'+3(y'+2y)=2y+1,$$
soit
$$y''+5y'+4y=1.$$
L'équation caractéristique de l'équation homogène est $r^2+5r+4=0$, de racines -1 et -4, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est
$$\{x\mapsto \lambda\mathrm{e}^{-x}+\mu\mathrm{e}^{-4x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}.$$
Comme la fonction constante égale à $\frac{1}{4}$ est clairement solution de l'équation non homogène, on en déduit qu'il existe λ et μ réels tels que
$$\forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=\frac{1}{4}+\lambda\mathrm{e}^{-x}+\mu\mathrm{e}^{-4x}.$$
De même, en injectant l'expression de y ($y=\frac{1}{2}(z'+3z-1)$ dans l'équation $y'+2y=z$, on obtient
$$(z'+3z-1)'+2(z'+3z-1)=2z,$$
soit
$$z''+5z'+4z=2,$$
donc z satisfait la même équation de y, sauf pour le second membre ! Donc on dispose de α et β deux réels tels que
$$\forall x\in\mathbb{R},\ z(x)=\frac{1}{2}+\alpha\mathrm{e}^{-x}+\beta\mathrm{e}^{-4x}.$$

On calcule alors

$$y'(x) + 2y(x) = -\lambda e^{-x} + -4\mu e^{-4x} + \frac{1}{2} + 2\lambda e^{-x} + 2\mu e^{-4x} = \frac{1}{2} + \lambda e^{-x} - 2\mu e^{-4x}.$$

Comme on veut que pour tout x, $y' + 2y = z$, on en déduit que pour tout x,

$$\frac{1}{2} + \lambda e^{-x} - 2\mu e^{-4x} = \frac{1}{2} + \alpha e^{-x} + \beta e^{-4x},$$

donc $\alpha = \lambda$ et $\beta = -2\mu$. De même, la seconde équation impose la même condition. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \frac{1}{4} + \lambda e^{-x} + \mu e^{-4x}$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = \frac{1}{2} + \lambda e^{-x} - 2\mu e^{-4x}.$$

Réciproquement, de telles fonctions vérifient bien le système ! (et on a la même forme que précédemment)

Exercice 11. *Équation de Bernoulli*. ●●○ On note (E_1) l'équation différentielle

$$-x^2 z'(x) + xz(x) = z^2(x). \tag{E_1}$$

On recherche les fonctions z solutions de $(E1)$ sur $K =]1; +\infty[$ et qui ne s'annulent pas sur K.

1. On pose $y = \dfrac{1}{z}$. Vérifier que y est solution sur K d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (E_2).

Correction

Dérivons y :
$$y' = \frac{-z'}{z^2}.$$
Or, par (E_1), pour tout x de $]1, +\infty[$,
$$-z'(x) + \frac{1}{x}z(x) = \frac{1}{x^2}z^2(x).$$
Donc
$$-z'(x) = -\frac{1}{x}z(x) + \frac{1}{x^2}z^2(x).$$
$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{z^2}\left(-\frac{1}{x}z(x) + \frac{1}{x^2}z^2(x)\right) \\ &= -\frac{1}{xz} + \frac{1}{x^2} \\ &= -\frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$
Donc y est solution de l'équation linéaire du premier ordre
$$y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

2. Résoudre (E_2) sur K. On vérifiera ensuite que ces solutions sont de la forme
$$g_a : x \mapsto \frac{\ln(ax)}{x}.$$
Vérifier que pour $a > 1$, g_a ne s'annule pas sur K. On a donc ainsi $z(x) = \dfrac{x}{\ln(ax)}$.

Correction

Résolvons l'équation homogène
$$y' + \frac{y}{x} = 0.$$
L'ensemble des solutions de l'équation sur $]1, +\infty[$ est $\{x \mapsto C\mathrm{e}^{-\Lambda(x)}, C \in \mathbb{R}\}$, où Λ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $\Lambda(x) = \ln(x)$ par exemple. D'où l'ensemble de solutions
$$\left\{x \mapsto \frac{C}{x}, C \in \mathbb{R}\right\}$$
Résolvons ensuite l'équation générale par la méthode de variation de la constante. On cherche une solution particulière $f : x \mapsto \dfrac{g(x)}{x}$. Alors $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{x} - \dfrac{g(x)}{x^2}$. Donc
$$f' + \frac{f}{x} = \frac{g'(x)}{x}.$$
Donc f est solution si et seulement si
$$g'(x) = \frac{1}{x},$$

donc si l'on prend $g(x) = \ln(x)$, $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est solution particulière. Donc l'ensemble des solutions est

$$\left\{x \mapsto \frac{C}{x} + \frac{\ln(x)}{x}, C \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \mapsto \frac{\ln(e^C)}{x} + \frac{\ln(x)}{x}, C \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \mapsto \frac{\ln(e^C x)}{x}, C \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \mapsto \frac{\ln(ax)}{x}, a \in \mathbb{R}_+^*$$

Si $a > 1$, alors pour tout x de K, $ax > 1$, donc $\ln(ax) > 0$, donc g_a ne s'annule pas sur K.

3. Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall x \in K,\ -x^2 z'(x) + xz(x) = z^2(x) \\ z(2) = 2 \end{cases}$$

Correction

Soit z une solution de

$$\forall x \in K,\ -x^2 z'(x) + xz(x) = z^2(x).$$

Alors on dispose de $a > 1$ tel que $z : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(ax)}$. Or on impose $z(2) = 2$, donc

$$\frac{2}{\ln(2a)} = 2,$$

i.e. $\ln(2a) = 1$, i.e. $2a = e$, donc $a = \dfrac{e}{2}$. Donc la solution du problème de Cauchy est

$$x \mapsto \frac{x}{\ln\left(\frac{e}{2}x\right)}.$$

4. Pour $a > 0$, on note (C_a) la courbe représentative de la fonction $f_a : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(ax)}$. Montrer que (C_a) est l'image de (C_1) par une homothétie de centre O dont on précisera le rapport.

Correction

Supposons $a > 1$ (l'énoncé est très vague à propos de l'ensemble de définition... c'est la magie des concours), alors pour tout x dans K,

$$f_a(x) = \frac{x}{\ln(ax)} = \frac{\frac{1}{a}ax}{\ln(ax)} = \frac{1}{a}\frac{ax}{\ln(ax)} = \frac{1}{a}f_1(ax).$$

Le graphe $(\mathcal{C}_a)$ de $x \mapsto f_1(ax)$ se déduit par une contraction horizontale de rapport $\frac{1}{a}$ de (C_1). De même, le graphe (C_a) de f_a se déduit de $(\mathcal{C}_a)$ par une contraction verticale de rapport $\frac{1}{a}$. Donc le graphe de (C_a) se déduit du graphe de (C_1) par une homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{a}$.

Exercice 12. ●●○ On considère l'équation

$$y''' - 3y'' + y' + y = 0.$$

1. En considérant une équation d'ordre 2 à coefficients constants vérifiée par $z = y' - y$, résoudre l'équation différentielle ci-dessus.
2. Développer $(x^2 - 2x - 1)(x - 1)$. Que remarquez-vous ?

Exercice 13. ●●○ On s'intéresse à l'équation différentielle

$$x^2y'' - xy' - 3y = x^4. \tag{E}$$

1. Quels sont les intervalles maximaux sur lesquels on peut résoudre (E), *a priori* ?

Correction

A priori, on peut résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

2. Résolution sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer que f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si la fonction $g : t \mapsto f(\mathrm{e}^t)$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une certaine équation différentielle linéaire à coefficients constants que l'on précisera.

Correction

Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$. Alors, si $g(t) = f(\mathrm{e}^t)$, $f(x) = g(\ln(x))$, bien défini car $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$f'(x) = \frac{1}{x}g'(\ln(x)),$$

et

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}g'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2}g''(\ln(x)),$$

d'où

$$x^2y'' - xy' - 3y = -g'(\ln(x)) + g''(\ln(x)) - g'(\ln(x)) - 3g(\ln(x)),$$

donc
$$g''(\ln(x)) - 2g'(\ln(x)) - 3g(\ln(x)) = x^4.$$
En posant $t = \ln(x)$, on a
$$g''(t) - 2g'(t) - 3g(t) = \mathrm{e}^{4t}.$$
Comme ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, on a g solution de
$$y'' - 2y' - 3y = \mathrm{e}^{4t}.$$

(b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction

- Résolvons l'équation homogène. Son équation caractéristique associée est $x^2 - 2x - 3 = 0$, de discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$, et donc de racines $r_1 = -1$ et $r_2 = 3$. Donc les solutions générales de l'équation homogène sont de la forme
$$t \mapsto A\mathrm{e}^{-t} + B\mathrm{e}^{3t},$$
avec A et B des réels.
- Ensuite, comme le second membre est e^{4t}, et que 4 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $a\mathrm{e}^{4t}$, où a est un réel. a doit vérifier
$$16a - 8a - 3a = 1,$$
soit $a = \frac{1}{5}$. Donc les solutions de l'équation non homogène sont de la forme
$$t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{4t}}{5} + A\mathrm{e}^{-t} + B\mathrm{e}^{3t},$$
avec A, B dans $\mathbb{R}$.

Donc les solutions de l'équation originale sont de la forme
$$x \mapsto \frac{x^4}{5} + \frac{A}{x} + Bx^3,$$
avec A, B deux réels.

3. Résolution sur $\mathbb{R}_-^*$.

(a) Montrer que f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si la fonction $g : t \mapsto f(-e^t)$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une certaine équation différentielle linéaire à coefficients constants que l'on précisera.

Correction

Sur $\mathbb{R}_-^*$, si on a $f(x) = g(\ln(-x))$, bien défini car $x \in \mathbb{R}_-^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$. Alors

$$f'(x) = \frac{1}{x}g'(\ln(-x)),$$

et

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}g'(\ln(-x)) + \frac{1}{x^2}g''(\ln(-x)),$$

d'où

$$x^2y'' - xy' - 3y = -g'(\ln(-x)) + g''(\ln(-x)) - g'(\ln(-x)) - 3g(\ln(-x)),$$

donc

$$g''(\ln(-x)) - 2g'(\ln(-x)) - 3g(\ln(-x)) = x^4.$$

En posant $t = \ln(-x)$, on a

$$g''(t) - 2g'(t) - 3g(t) = \mathrm{e}^{4t}.$$

Comme $x \mapsto \ln(-x)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_-^*$ sur $\mathbb{R}$, on a g solution de

$$y'' - 2y' - 3y = \mathrm{e}^{4t}.$$

(b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.

Correction

Et donc g est de la forme

$$t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{4t}}{5} + A\mathrm{e}^{-t} + B\mathrm{e}^{3t},$$

Donc f est de la forme

$$x \mapsto \frac{x^4}{5} - \frac{A}{x} - Bx^3,$$

avec A et B des réels. Comme A et B sont quelconques, on peut aussi dire que f est de la forme

$$x \mapsto \frac{x^4}{5} + \frac{A}{x} + Bx^3,$$

avec A et B des réels.

4. Déterminer les solutions de (E) définies et dérivables sur tout $\mathbb{R}$.

Correction

La question, assez vague, peut être comprise de plusieurs manières :

(a) soit on en reste aux deux résolutions séparées : sur $\mathbb{R}_+^*$, comme sur $\mathbb{R}_-^*$, les solutions sont de la forme

$$x \mapsto \frac{x^4}{5} + \frac{A}{x} + Bx^3,\ A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R}.$$

(b) soit on cherche une solution définie sur $\mathbb{R}$. Pour qu'une telle solution existe, il faut qu'elle soit définie partout, donc elle est de la forme

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^4}{5} + B_+ x^3 \text{ si } x > 0, \\ \dfrac{x^4}{5} + B_- x^3 \text{ si } x < 0, \end{cases}$$

avec B_+ et B_- deux réels a priori distincts. On veut que la fonction soit continue en 0, ce qui est le cas quels que soient les B_+ et les B_- choisis.
Ensuite, on la veut dérivable en 0, ce qui est aussi le cas quels que soient les B_+ et les B_- choisis !

Exercice 14. ●●○ On considère l'équation suivante

$$\left(1 - x^2\right) y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$$

1. En considérant $z(t) = y(\cos(t))$, résoudre l'équation sur $]-1, 1[$.
2. Proposer une stratégie similaire pour résoudre l'équation sur $]-\infty, -1[$ et sur $]1, +\infty[$.

Exercice 15. ●●○ On considère l'équation

$$(2x + 1)y'' + (4x - 2)y' - 8y = 0$$

1. Déterminer une solution de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$.
2. En divisant par la solution trouvée, résoudre l'équation différentielle.

Exercice 16. *Une équation pas vraiment linéaire*. ●●◐ On considère l'équation $xy' = |y - 1|$, que l'on veut résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Soit une solution de l'équation ne valant jamais 1. Déterminer, en disjoignant les cas, la forme de cette solution.

Correction

Comme une solution de cette équation est dérivable, elle est continue, donc y est toujours > 1 ou toujours < 1.
Si $y < 1$, alors y satisfait l'équation $xy' = 1 - y$, i.e. $y' + \dfrac{1}{x} y = \dfrac{1}{x}$. Alors

- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est solution de l'équation homogène,
- $x \mapsto 1$ est solution de l'équation non homogène.

Donc y est de la forme $x \mapsto \dfrac{\lambda}{x} + 1$. Comme $y < 1$, $\lambda < 0$.
Si $y > 1$, alors y satisfait l'équation $xy' = y - 1$, i.e. $y' - \dfrac{1}{x} y = \dfrac{1}{x}$. Alors

- $x \mapsto x$ est solution de l'équation homogène,
- $x \mapsto 1$ est solution de l'équation non homogène.

Donc y est de la forme $x \mapsto \mu x + 1$. Comme $y > 1$, $\mu > 0$.

2. Démontrer qu'en fait, une solution de l'équation différentielle ne peut jamais valoir 1.

Correction

Chose fondamentale, toute solution de l'équation différentielle est croissante. Soit y une solution de l'équation. Il s'agit de montrer que $y-1$ va garder un signe constant !

- Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $y(x_0) < 1$. Par croissance de y, on sait déjà que sur $]0, x_0]$, y est strictement inférieure à 1. Ensuite, par continuité de y, on dispose d'un intervalle I sur lequel y est < 1. Choisissons I le plus grand possible. Si I n'était pas égal à $\mathbb{R}_+^*$, alors I serait majoré : il disposerait d'une borne supérieure α. Or, pour tout $x < \alpha$, $y(x) = 1 + \dfrac{\lambda}{x}$, avec $\lambda < 0$. Ainsi, par continuité, $y(\alpha) = 1 + \dfrac{\lambda}{\alpha} < 1$. Par continuité, à nouveau, on dispose de $\eta > 0$ tel que y reste < 1 sur $[\alpha, \alpha + \eta[$, ce qui contredit la maximalité de I !
- On fait de même s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $y(x_0) > 1$, mais en regardant la borne inférieure de I.

Exercice 17. ●●◐ Déterminer l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \sin(x) + 2\int_0^x \mathrm{e}^{x-t} f(t)dt.$$

Correction

Analyse. Soit f une solution du problème. Alors pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \sin(x) + 2\mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)dt.$$

Comme $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)dt$ est dérivable, f est dérivable et pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) + 2\mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)dt + 2\mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-x} f(x) \\ &= \cos(x) + 2\mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)dt + 2f(x) = \cos(x) + f(x) - \sin(x) + f(x), \end{aligned}$$

donc f vérifie

$$f'(x) - 2f(x) = \cos(x) - \sin(x).$$

Résolvons donc $y' - 2y = \cos(x) - \sin(x)$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\{x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{2x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Pour trouver une solution particulière, on cherche une solution sous la forme $g : x \mapsto h(x)\mathrm{e}^{2x}$. Alors h est solution de

$$h'(x) = \mathrm{e}^{-2x}(\cos(x) - \sin(x)).$$

On prend alors $h : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-2t}(\cos(t) - \sin(t))dt$. On fait une intégration par parties, en dérivant e^{-2t} et en intégrant $\cos(t) - \sin(t)$. Alors

$$h(x) = [\mathrm{e}^{-2t}(\sin(t) + \cos(t))]_0^x + 2\int_0^x \mathrm{e}^{-2t}(\sin(t) + \cos(t))dt.$$

Dans la deuxième intégrale, on pose à nouveau $u(t) = \mathrm{e}^{-2t}$ et $v'(t) = \sin(t) + \cos(t)$. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^x \mathrm{e}^{-2t}(\sin(t)+\cos(t))dt &= [\mathrm{e}^{-2t}(-\cos(t)+\sin(t))]_0^x \\ &\quad + 2\int_0^x \mathrm{e}^{-2t}(-\cos(t)+\sin(t))dt \\ &= \mathrm{e}^{2x}(\sin(x)-\cos(x)) + 1 + 2h(x),\end{aligned}$$

donc

$$h(x) = \mathrm{e}^{-2x}(\sin(x)+\cos(x)) - 1 - 2\mathrm{e}^{2x}(\sin(x)-\cos(x)) - 2 - 4h(x),$$

donc

$$h(x) = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}(3\cos(x)-\sin(x)) - \frac{3}{5}.$$

Changer la constante ne change pas le fait que l'on ait une primitive, donc une solution particulière de l'équation différentielle est

$$x \mapsto \frac{1}{5}(3\cos(x)-\sin(x))$$

Donc on dispose de λ dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}(3\cos(x)-\sin(x)) + \lambda\mathrm{e}^{-2x}.$$

Comme $f(0) = 0$, $\lambda = 0$, donc

$$f(x) = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}(3\cos(x)-\sin(x)).$$

La **synthèse** est pour vous...

Exercice 18. ●●○ Soit $a > 0$. On cherche les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x > 0,\ f'(x) = f\left(\frac{a}{x}\right)$$

1. Démontrer que si f satisfait cette équation fonctionnelle, alors elle est $\mathscr{C}^2$ et satisfait une équation différentielle du second ordre, à coefficients non constants, que l'on précisera.
2. Déterminer les fonctions de la forme $x \mapsto x^\alpha$ solutions de l'équation précédente, et résoudre entièrement l'équation fonctionnelle.

Exercice 19. ●●◐ Déterminer toutes les fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout x réel,

$$f'(x) = f(2-x).$$

Correction

Analyse. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(2-x).$$

Alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -f'(2-x) = -f(2-(2-x)) = -f(x),$$

donc $f'' + f = 0$, donc f est de la forme

$$x \mapsto A\sin(x) + B\cos(x),\ A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R}.$$

Soit alors $x \in \mathbb{R}$. On doit avoir $f'(x) = f(2-x)$, c'est-à-dire

$$A\cos(x) - B\sin(x) = A\sin(2-x) + B\cos(2-x).$$

Or, $\sin(2-x) = \sin(2)\cos(x) - \sin(x)\cos(2)$ et $\cos(2-x) = \cos(2)\cos(x) + \sin(2)\sin(x)$. L'égalité se réécrit donc

$$A\cos(x) - B\sin(x) = A(\sin(2)\cos(x) - \sin(x)\cos(2)) + B(\cos(2)\cos(x) + \sin(2)\sin(x)),$$

soit

$$\cos(x)(A - \sin(2)A - \cos(2)B) + \sin(x)(\cos(2)A - \sin(2)B - B) = 0$$

En prenant $x = 0$, on obtient $A - \sin(2)A - \cos(2)B = 0$.
En prenant $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\cos(2)A - \sin(2)B - B = 0$. Donc A et B sont solutions du système

$$\begin{cases} (1-\sin(2))A - \cos(2)B = 0 \\ \cos(2)A - (\sin(2)+1)B = 0 \end{cases}$$

On remarque alors que $(1+\sin(2))L_1 = \cos(2)L_2$. Donc le système se réécrit

$$\begin{cases} (1-\sin(2))A - \cos(2)B = 0 \\ B = \gamma,\ \gamma \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont les $\left(\dfrac{\cos(2)}{1-\sin(2)}\gamma, \gamma\right)$, avec $\gamma \in \mathbb{R}$. Donc f est de la forme

$$x \mapsto \frac{\cos(2)}{1-\sin(2)}\gamma\sin(x) + \gamma\cos(x),\ \gamma \in \mathbb{R},$$

ou encore, puisque γ est quelconque,

$$x \mapsto \cos(2)\gamma\sin(x) + (1-\sin(2))\gamma\cos(x),\ \gamma \in \mathbb{R},$$

Or, $\cos(2)\gamma\sin(x) + (1-\sin(2))\gamma\cos(x) = \gamma(\cos(2)\sin(x) - \sin(2)\cos(x)) + \gamma\cos(x) = \gamma\sin(x-2) + \gamma\cos(x)$. Donc f est de la forme

$$x \mapsto \gamma\sin(x-2) + \gamma\cos(x),\ \gamma \in \mathbb{R}.$$

Synthèse. Soit γ un réel et

$$f : x \mapsto x \mapsto \gamma\sin(x-2) + \gamma\cos(x).$$

Alors pour tout x réel, $f'(x) = \gamma\cos(x-2) - \gamma\sin(x)$ et $f(2-x) = \gamma\sin(-x) + \gamma\cos(2-x) = \gamma\cos(x-2) - \gamma\sin(x) = f'(x)$. D'où l'égalité désirée.
Conclusion. L'ensemble des fonctions f fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout x réel, $f'(x) = f(2-x)$ est

$$\{x \mapsto \gamma\sin(x-2) + \gamma\cos(x),\ \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 20. ●●● Déterminer l'ensemble des couples de complexes (α, β) tels que toute solution de $y'' + \alpha y + \beta = 0$ soit bornée.

Correction

Analyse. Résolvons d'abord l'équation différentielle. L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $x^2 + \alpha x = 0$. Soit ω une racine de $-\alpha$. Alors les solutions de l'équation homogène sont de la forme $A\mathrm{e}^{\omega x} + B\mathrm{e}^{-\omega x},\ A \in \mathbb{C},\ B \in \mathbb{C}$. Pour résoudre l'équation avec second membre,
Si α=0, on a $y'' = \beta$, donc y est de la forme $y(x) = \frac{\beta}{2}x^2 + xC + K$, où C et K sont des constantes complexes. Donc y n'est pas bornée si $C \neq 0$. Donc on ne peut avoir $\alpha = 0$.
Supposons maintenant $\alpha \neq 0$**.** Alors on remarque que $y = -\frac{\beta}{\alpha}$ est solution particulière de l'équation. Donc la forme générale de l'équation est

$$x \mapsto A\mathrm{e}^{\omega x} + B\mathrm{e}^{-\omega x} - \frac{\beta}{\alpha},\ A \in \mathbb{C},\ B \in \mathbb{C}.$$

La constante n'est pas un obstacle au caractère borné des solutions. En revanche, si $z \in \mathbb{C}$, pour que $x \mapsto \mathrm{e}^{zx}$ soit borné, il faut et il suffit que $\mathfrak{Re}(z) \leqslant 0$. Donc, ici, il faut que $\mathfrak{Re}(\omega) \leqslant 0$, et que $\mathfrak{Re}(-\omega) \leqslant 0$, i.e. que $-\mathfrak{Re}(\omega) \leqslant 0$. Donc, nécessairement,

$$\mathfrak{Re}(\omega) = 0.$$

Donc nécessairement, $\omega = i\gamma$, où $\gamma \in \mathbb{R}$. Donc $-\alpha = \omega^2 = -\gamma^2$, i.e. $\boxed{\alpha \geqslant 0}$.
Synthèse. Supposons que $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{C}$. Alors les racines de $x^2 + \alpha = 0$ sont $\pm i\sqrt{\alpha}$, donc les solutions de l'équation différentielle avec second membre sont de la forme

$$x \mapsto A\mathrm{e}^{i\sqrt{\alpha}x} + B\mathrm{e}^{-i\sqrt{\alpha}x} - \frac{\beta}{\alpha},\ A \in \mathbb{C},\ B \in \mathbb{C}.$$

Ces solutions sont bien bornées.