TD 8
Nombres réels et suites

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. *Moyenne de Cesàro, exercice ultra-classique*. ●●○

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier n par $S_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, avec $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ell$. On commencera par $\ell = 0$.

2. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

3. Les réciproques des deux énoncés précédents sont-elles vraies ?

Correction

Exercice corrigé en cours : me demander si besoin d'éclaircissements.

Exercice 2. *Moyenne arithmético-géométrique*. ●◐○ Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = a,\ v_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}. \end{cases}$$

Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers la même limite.

Exercice 3. *Vers le critère de d'Alembert*. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, avec ℓ un réel.

1. Montrer que si $\ell < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Correction

On sait que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell < 1$. Soit a tel que $\ell < a < 1$ ($a = \dfrac{1+\ell}{2}$ par exemple). Alors on dispose d'un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} < a.$$

Alors on montre par une récurrence immédiate que

$$\forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant a^{n-N} u_N.$$

Or, $a^{n-N} u_N \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $0 < a < 1$, donc, comme $u_n > 0$, on en déduit par théorème d'encadrement que $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Montrer que si $\ell > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Correction

En posant encore $a = \dfrac{\ell+1}{2}$, on a cette fois-ci $\ell > a > 1$, et on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant a,$$

donc

$$\forall n \geqslant \mathbb{N},\ u_n \geqslant a^{n-N} u_N.$$

Comme $a > 1$ et $u_N > 0$, $a^{n-N} u_N \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3. Que peut-on dire si $\ell = 1$?

Correction

Si $\ell = 1$ on ne peut rien dire : prendre $u_n = n$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$.

Exercice 4. ●●◐ Soit (u_n) une suite réelle.

1. On suppose (u_{2n}), (u_{2n+1}) convergentes de même limite. Montrer que (u_n) converge.

Correction

C'est du cours !

2. On suppose (u_n) croissante et (u_{2n}) convergente. Montrer que (u_n) converge.

Correction

Montrons que (u_n) est majorée. $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc bornée, donc majorée par $M \in \mathbb{R}$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$: si n est pair, $u_n \leqslant M$; si n est impair, $n+1$ est pair donc $u_{n+1} \leqslant M$, donc, par croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n \leqslant M$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, donc convergente car croissante.

3. On suppose (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes. Montrer que (u_n) converge.

Correction

Posons $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{2n}$, $\ell' = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}$, $\ell'' = \lim_{n\to+\infty} u_{3n}$. La suite (u_{6n}) est extraite de (u_{2n}) donc converge vers ℓ ; mais elle est aussi extraite de (u_{3n}) donc converge vers ℓ''. Donc $\ell = \ell''$. De même, la suite $(u_{3(2n+1)})$ est à la fois extraite de (u_{2n+1}) et (u_{3n}) donc $\ell' = \ell''$. Donc $\ell = \ell'$. Donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite. Donc (u_n) converge.

Exercice 5. ●●○ On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.

Correction

On procède par récurrence : pour l'initialisation, $u_0 = 3 > 2$ et ensuite, si $u_n > 2$, on calcule
$$u_{n+1} - 2 = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - 2 = \frac{4u_n - 2 - 2u_n - 2}{u_n + 1} = \frac{2(u_n - 2)}{u_n + 1} > 0,$$
par HR. D'où l'hérédité et le résultat.

2. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction

Soit n dans $\mathbb{N}$. Alors
$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - u_n = \frac{4u_n - 2 - u_n^2 - u_2}{u_n + 1} = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{u_n + 1} = -\frac{(u_n - 2)(u_n - 1)}{u_n + 1} < 0,$$
car $u_n > 2$. Donc (u_n) est décroissante.

3. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction

Décroissante et minorée, la suite converge. SOit ℓ sa limite. Alors comme $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$, $\ell = \frac{4\ell - 2}{\ell + 1}$ (car (u_{n+1}) est extraite de (u_n)), donc $\ell^2 + \ell = 4\ell - 2$. Donc $\ell = 1$ ou $\ell = 2$ (on résout l'équation). Or, pour tout n, $u_n > 2$ donc, en passant à la limite, $\ell \geqslant 2$ donc $\ell = 2$.

Exercice 6. ●○○ Soit (u_n) une suite décroissante de réels telle que $u_n + u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ainsi qu'un équivalent en $+\infty$.

Correction

ATTENTION ! On ne sait pas que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ! Donc on ne peut pas dire que $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell$ donc que $\ell = 0$... En revanche, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$, donc
$$u_n + u_{n+1} \leqslant 2u_n \leqslant u_{n-1} + u_n,$$
Or, $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$ et $u_{n-1} + u_n \sim \frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}$. Donc, par encadrement, $2u_n \sim \frac{1}{n}$ donc $u_n \sim \frac{1}{2n}$.

Exercice 7. ●●○ Déterminer, à l'aide des relations de domination, de négligeabilité, et d'équivalence, les limites des suites suivantes

1. $\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\tan\frac{1}{2n}}$
2. $\dfrac{n^4 - 2n^{5/2} + n\sqrt{n} - \ln(n)}{n + 3n^2\sin\frac{1}{\sqrt{n}} - n\ln(n)}$
3. $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$
4. $(1+nx)^{\frac{1}{n}}$
5. $\dfrac{1-e^{\frac{3}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}$
6. $\dfrac{n^3\sin\frac{3}{1+n}}{\operatorname{Arctan}\frac{1}{8n^2}e^{\sqrt{n}}}$

2 Exercices à travailler en TD

Plan de travail, par méthodes et techniques à connaître

- déterminer des limites : exercices 10, 12, 13, 14, 15.
- manipuler des parties entières : exercices 17, 18.
- manipuler des suites extraites : exercice 19.
- manipuler des ε (pour revenir à la définition de la convergence par exemple) : exercices corrigés en classe 3 et 1, exercices 18, 8.
- étudier des suites récurrentes : exercices faits en classe 2 et 5, exercices 24, 25, 26, 27.

2.1 Epsiloneries

Exercice 8. *Vers le critère de Cauchy pour les séries..* ●●○ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = \ell$, avec ℓ un réel.

1. Montrer que si $\ell < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Correction

On raisonne de même : si $a = \dfrac{\ell+1}{2}$, on dispose d'un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N,\ \sqrt[n]{u_n} < a,$$

donc

$$\forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant a^n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et on conclut par théorème d'encadrement.

2. Montrer que si $\ell > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Correction

De même si $\ell > 1$.

3. Que peut-on dire si $\ell = 1$?

Correction

Enfin, si l'on prend $u_n = e^{\sqrt{n}}$ et $v_n = e^{-\sqrt{n}}$, $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $v_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors que $\sqrt[n]{u_n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\sqrt[n]{v_n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 9. *Une propriété de limite monotone*. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N} : [p \geqslant n \text{ et } (\forall q \in \mathbb{N}, q \geqslant p \Rightarrow u_q \geqslant u_n)]$$

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ?

Correction

NON ! Si on prend $u_n = n + (-1)^n$: alors $u_{n+1} - u_n = n + 1 + (-1)^{n+1} - n - (-1)^n = 1 + 2.(-1)^{n+1}$, qui change de signe en fonction de la parité de n. Donc la suite n'est pas croissante.
soit $n \in \mathbb{N}$. **Posons** $p = n + 2$. Soit $q \geqslant p$. Alors

$$u_q - u_n = (q - n) + (-1)^q - (-1)^n.$$

Or, $q - n \geqslant 2$ donc $q - n + (-1)^q - (-1)^n \geqslant 0$. Donc la suite vérifie la propriété.

2. Montrer en revanche que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une propriété « de limite monotone » : si elle est majorée elle converge, et si elle n'est pas majorée, elle tend vers $+\infty$.

Correction

On considère $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.
. Si A est majorée, soit ℓ sa borne supérieure. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, on dispose de $n \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell$. Par la proposition satisfaite par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geqslant n$ et $\forall q \in \mathbb{N},\ q \geqslant N \Rightarrow u_q \geqslant u_N$.
Soit $q \geqslant N$. Alors $\ell - \varepsilon \leqslant u_N \leqslant u_q \leqslant \ell$. Ceci assure la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
. Sinon, soit $M \in \mathbb{N}$. On dispose donc de $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant M$. Par la proposition satisfaite par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geqslant n$ et $\forall q \in \mathbb{N},\ q \geqslant N \Rightarrow u_q \geqslant u_N$.
Soit $q \geqslant N$. Alors $u_q \geqslant u_N \geqslant M$. Ceci assure la divergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $+\infty$.

2.2 Théorèmes généraux sur les suites et les limites

Exercice 10. ●○○ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1,\ 0 \leqslant v_n \leqslant 1 \text{ et } u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Que dire de ces suites ?

Correction

Ces deux suites convergent vers 1. En effet, comme pour tout n dans $\mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n v_n \leqslant v_n \leqslant 1.$$

Or, $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Donc, par théorème d'encadrement, $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
De même, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 11. ●●○ Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, (u_n) et (v_n) deux suites telles que

$$\begin{cases} n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant a \text{ et } v_n \leqslant b \\ u_n + v_n \to a + b \end{cases}$$

Montrer que $u_n \to a$ et $v_n \to b$.

Correction

Là, on va utiliser des ε.
Soit $\varepsilon > 0$**.** Comme $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a + b$, on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$,

$$a + b - \varepsilon \leqslant u_n + v_n \leqslant a + b + \varepsilon,$$

donc, si $n \geqslant N$,

$$a - \varepsilon + (b - v_n) \leqslant u_n \leqslant a + \varepsilon + (b - v_n)$$

Mais $b - v_n \geqslant 0$, donc pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant a - \varepsilon$. Or, $u_n \leqslant a$ donc pour tout $N \geqslant N$,

$$a - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant a + \varepsilon.$$

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$.
De même, $v_n = u_n + v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a + b - a = b$.

Exercice 12. ●○○

1. Démontrer que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $\ln(k + 1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

Correction

Soit k dans $\mathbb{N}^*$. Alors

$$\ln(k + 1) - \ln(k) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k},$$

par étude de fonctions.

2. Déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Correction

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Alors

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k + 1) - \ln(k) = \ln(n + 1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par minoration.

Exercice 13. ●○○ /●●○ Déterminer les limites en $+\infty$ des suites de terme général

1. $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}$
2. $\sqrt[n]{n^2}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2}$
4. $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$
5. $\dfrac{\sin(2n)}{\mathrm{th}(3n)}$
6. $\dfrac{n^n}{n!}$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2}$
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\lfloor kx\rfloor}{n^2}$

Correction

1. On écrit, si $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n} &= \frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}\\ &= \frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}}\\ &= \frac{2n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}\\ &= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\end{aligned}$$

2. Si $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{n^2} &= n^{\frac{1}{n}}\\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(n^2\right)}\end{aligned}$$

Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\ln\left(n^2\right)=0$, donc $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=1$.

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2}$
On peut calculer directement cette somme :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1+\frac{1}{n}}{2}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}$$

4. $\dfrac{n^n}{n!}$
On écrit $\dfrac{n^n}{n!}=\dfrac{n\times n\times\cdots\times n}{1\times 2\times\cdots\times n}$. L'idée va être de séparer ce produit en 2, avec une partie minorée et une partie qui tend vers $+\infty$. Écrivons

$$\frac{n^n}{n!}=n\times\frac{n^{n-1}}{n!}.$$

Or, $n! = \prod_{k=1}^{n} k = \prod_{k=2}^{n} k \leqslant \prod_{k=2}^{n} n = n^{n-1}$, donc $\frac{n^{n-1}}{n!} \geqslant 1$, donc $\frac{n^n}{n!} \geqslant n$, donc $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$.

5. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$

Bornons chacun des termes de la somme. Si $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{1}{n^2+n^2} \leqslant \frac{1}{n^2+k^2} \leqslant \frac{1}{1+n^2}.$$

En sommant sur k, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+n^2},$$

soit

$$\frac{n}{2n^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} \leqslant \frac{n}{n^2+1},$$

or

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n^2} = 0 \\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0 \end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} = 0 \text{ par encadrement.}$$

6. $\sum_{k=1}^{n} \frac{[kx]}{n^2}$

Encadrons le terme sommé. Par définition, si $k \in [\![1, n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$kx - 1 \leqslant [kx] \leqslant kx,$$

donc

$$\frac{kx-1}{n^2} \leqslant \frac{[kx]}{n^2} \leqslant \frac{kx}{n^2}.$$

En sommant sur k, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{kx-1}{n^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{[kx]}{n^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{kx}{n^2}.$$

Or, $\sum_{k=1}^{n} \frac{kx}{n^2} = \frac{xn(n+1)}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{2}$. De même,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{kx-1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{kx}{n^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{xn(n+1)}{2n^2} - \frac{n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{2}.$$

Donc, par encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{[kx]}{n^2} = \frac{x}{2}$$

Exercice 14. *Problème d'interversion des limites*. ●◐○
Comparer

$$\lim_{k\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k,\quad \lim_{n\to+\infty}\lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

Correction

1. Soit k dans $\mathbb{N}$. Alors, comme $\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n}=1$, $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k=1$.

Donc, pour tout k, $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k=1$. Donc

$$\lim_{k\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k=1.$$

2. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Alors $-1<1-\frac{1}{n}<1$, donc la suite géométrique de raison $1-\frac{1}{n}$ est de limite nulle. Donc $\lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k=0$.

Donc pour tout n, $\lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k=0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k=0.$$

3.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\mathrm{e}.$$

Exercice 15. *Sur l'indétermination* 1^∞. ●◐○
Soit ℓ un élément de $\mathbb{R}_+^*\cup\{+\infty\}$. Déterminer deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim_{n\to\infty}u_n=1$, $\lim_{n\to\infty}v_n=+\infty$, et $\lim_{n\to\infty}u_n^{v_n}=\ell$.

Correction

Si $\ell=0$, posons $v_n=n^2$ et $u_n=\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}$. Alors $u_n^{v_n}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\times n^2}=\mathrm{e}^{-n}\xrightarrow[+\infty]{}0$.
Si $\ell>0$, posons $v_n=n$ et $u_n=\mathrm{e}^{\frac{\ln(\ell)}{n}}$. Alors $u_n^{v_n}$ est la suite constante égale à ℓ.
Si $\ell=+\infty$, posons $v_n=n^2$ et $u_n=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$. Alors $u_n^{v_n}=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\times n^2}=\mathrm{e}^n\xrightarrow[+\infty]{}+\infty$.

Exercice 16. ●●○ On va démontrer que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite. On suppose que c'est le cas et qu'elle en possède une.

1. Démontrer que cette limite est finie. On l'appelle ℓ.

Correction

Si $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite, comme $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, cette limite est nécessairement finie.

2. Démontrer que la suite $(\cos(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, puis que $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction

$(\cos(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ donc converge aussi vers ℓ. Mais on sait que

$$\cos(n+1) = \cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1).$$

Comme $\sin(1) \neq 0$, $\sin(n) = \dfrac{\cos(n+1) - \cos(n)\cos(1)}{\sin(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell(1-\cos(1))}{\sin(1)}$.

3. Aboutir à une contradiction en échangeant les rôles de sin et de cos.

Correction

Notons ℓ' la limite de $\sin(n)$. Alors $\ell' = \ell\dfrac{1-\cos(1)}{\sin(1)}$.
Mais $\sin(n+1) = \sin(n)\cos(1) + \sin(1)\cos(n)$. Donc

$$\cos(n) = \frac{\sin(n+1) - \sin(n)\cos(1)}{\sin(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'\frac{1-\cos(1)}{\sin(1)}.$$

Donc

$$\ell = \ell'\frac{1-\cos(1)}{\sin(1)}.$$

Donc $\ell = \ell\left(\dfrac{1-\cos(1)}{\sin(1)}\right)^2$. Or, $\ell \neq 0$ car sinon $\ell' = 0$, donc on aurait $\ell^2 + \ell'^2 = 0$, absurde car $\cos(n)^2 + \sin(n)^2 = 1$. Donc

$$\left(\frac{1-\cos(1)}{\sin(1)}\right)^2 = 1,$$

donc $(1-\cos(1))^2 = \sin(1)^2$, donc $(1-\cos(1))^2 = 1-\cos(1)^2 = (1-\cos(1))(1+\cos(1))$. Mais $\cos(1) \neq 1$, donc $1-\cos(1) = 1+\cos(1)$, donc $\cos(1) = 0$, absurde ! ! ! ! Donc $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède pas de limite.

Exercice 17. ●●○ Soient a, b, c trois réels tels que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\lfloor an\rfloor + \lfloor bn\rfloor = \lfloor cn\rfloor.$$

Démontrer que $a+b=c$.

Correction

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,

$$\frac{\lfloor an\rfloor}{n} + \frac{\lfloor bn\rfloor}{n} = \frac{\lfloor cn\rfloor}{n}.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

donc, en faisant tendre n vers $+\infty$, $a+b=c$!
(rq : on montre que $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ par encadrement)

Exercice 18. ●●◐ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels convergeant vers une limite ℓ réelle. A-t-on

$$\lim_{n\to+\infty} \lfloor u_n \rfloor = \lfloor \ell \rfloor \ ?$$

Correction

Montrons déjà que si $\ell \notin \mathbb{Z}$, alors $[u_n] \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Si $\ell \notin \mathbb{Z}$, on a $[\ell] < \ell < [\ell]+1$, donc si $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\min([\ell]+1, [\ell])$ Alors $[\ell] < \ell - \varepsilon < \ell < \ell + \varepsilon < [\ell]+1$. (Penser qu'on s'est pris une marge afin de rester à l'intérieur de l'intervalel $][\ell], [\ell]+1[$.
Or, $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell$ donc on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n$, $\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$. Mais alors si $n \geqslant N$,

$$[\ell] < \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon < [ell] + 1,$$

donc pour tout $n \geqslant N$, $[u_n] = [\ell]$, donc $[u_n]$ est constante égale à $[\ell]$ àpcr, donc $[u_n] \underset{+\infty}{\longrightarrow} [\ell]$.
En revanche, si $\ell \in \mathbb{Z}$, $[u_n]$ tend vers $[\ell]$ si, et seulement si $u_n \geqslant \ell$ àpcr. En effet, si c'est le cas, en posant $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, on a $\ell \leqslant u_n \leqslant \ell + \dfrac{1}{2}$ àpcr, donc $[u_n]$ constante égale àpcr. Si ce n'est pas le cas alors $[u_n]$ possède une suite extraite convergent vers $[\ell]-1$.

2.3 Du côté des sous-suites

Exercice 19. ●●○ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. Montrer qu'elle admet une suite extraite qui diverge vers $+\infty$.

Correction

Par hypothèse, on suppose que

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M.$$

Il nous faut alors **construire** une extraction φ. Construisons-la par récurrence.
Prenons $M=0$ et **prenons** $N=0$**.** Alors on dispose de n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > 0$. **Posons** $\varphi(0) = n_0$**.**
Supposons $\varphi(n)$ construite pour un certain n. **Prenons** $M = n$ et **prenons** $N = \varphi(n)+1$**.** Alors on dispose de k_0 dans $\mathbb{N}$ tel que $k_0 > N$ et $u_{k_0} > n$. **Posons** $\varphi(n+1) = k_0 > \varphi(n)$.
Alors on a construit une fonction φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante, car $\varphi(n+1) > \varphi(n)$, et telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} > n$, donc $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2. On suppose que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite bornée.

Correction

Nions « $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ » : on dispose de $M>0$ tel que

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \exists n\geqslant N,\ |u_n|\leqslant M.$$

Construisons alors, par récurrence, une extraction φ telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_{\varphi(n)}|\leqslant M$.

Initialisation. Dans la proposition, prenons $N=0$. Alors on dispose de $n\geqslant 0$ tel que $|u_n|\leqslant M$. Notons $\varphi(0)=n$.

Hérédité. Si $\varphi(k)$ a été construite pour un certain $k\in\mathbb{N}$, on prend $N=\varphi(k)+1$ dans la proposition précédente. Alors on dispose de $n\geqslant\varphi(k)+1$ tel que $|u_n|\leqslant M$. Posons $\varphi(k+1)=n$. Alors $\varphi(k+1)>\varphi(k)$ et $|u_{\varphi(k+1)}|\leqslant M$.

On a ainsi construit l'extraction désirée.

Exercice 20. ●●◐ Soient $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\dfrac{p_n}{q_n}$ converge vers un irrationnel x.

Démontrer que $q_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ et que $|p_n|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

On pourra procéder par l'absurde et par extractions de suites.

Correction

On suppose que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$.

Alors on dispose d'une sous-suite de $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, qui soit majorée (fait en classe !).

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on dispose d'une sous-suite de $(q_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, notons-la $(q_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, qui converge.

Mais $(q_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers qui converge, donc elle est stationnaire. En particulier, elle converge vers un entier.

Mais comme $(q_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(q_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ aussi ! Comme il s'agit d'une suite d'entiers, elle est stationnaire donc, en particulier, converge vers un entier. Donc $\dfrac{p_{\varphi\circ\psi(n)}}{q_{\varphi\circ\psi(n)}}$ converge vers un quotient de deux entiers, i.e. vers un rationnel. Donc x est rationnel, absurde !

Exercice 21. *Approximation diophantienne*. ●●◐ Si y est un réel, on appelle partie fractionnaire de y la quantité, notée $\{y\}$ et définie par $\{y\}=y-\lfloor y\rfloor$. Soit x un réel.

1. Démontrer que : $\forall N\in\mathbb{N},\ \exists(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*,\ 1\leqslant q\leqslant N,\ \left|x-\dfrac{p}{q}\right|\leqslant\dfrac{1}{qN}$.

   On appliquera le principe des tiroirs à $0,\{x\},\{2x\},\dots,\{Nx\}$.

Correction

On considère les N intervalles $\left[\dfrac{k}{N},\dfrac{k+1}{N}\right[$ (fermé si $k=N-1$). Les $N+1$ points $0,\{x\},\{2x\},\dots,\{Nx\}$ appartiennent à ces intervalles, donc, d'après le principe des tiroirs, il existe deux de ces points dans un de ces intervalles, i.e. il existe k et ℓ tels que $|\{kx\}-\{\ell x\}|\leqslant\dfrac{1}{N}$. Alors

$$|(k-\ell)x-(\lfloor kx\rfloor-\lfloor \ell x\rfloor)|\leqslant\frac{1}{N},$$

i.e.
$$\left|x - \frac{(\lfloor kx\rfloor - \lfloor \ell x\rfloor)}{(k-\ell)}\right| \leqslant \frac{1}{N(k-\ell)},$$
en supposant $k \geqslant \ell$. En posant $q = k-\ell$, et $p = \lfloor kx\rfloor - \lfloor \ell x\rfloor$, comme $q \leqslant N$,
$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2},$$
d'où le résultat !

2. En déduire qu'il existe une infinité de couples (p, q) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tels que $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| \leqslant \dfrac{1}{q^2}$.

Correction

Si x est rationnel, c'est évident : si $x = \dfrac{a}{b}$, prendre $\dfrac{an}{bn}$ pour tout n.
Sinon, si x est irrationnel, on a construit, dans le théorème précédent, une suite (p_N, q_N) telle que pour tout N,
$$\left|x - \frac{p_N}{q_N}\right| \leqslant \frac{1}{Nq_N}.$$
En particulier $\dfrac{p_N}{q_N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Mais q_N est une suite d'entiers. Si elle ne tend pas vers $+\infty$, on peut en extraire une sous-suite bornée $(q_{\varphi(N)})$ (le redémontrer), de laquelle on peut extraire une sous-suite convergente $(q_{\varphi\circ\psi(N)})$. Mais une suite d'entiers convergente est stationnaire, donc $(q_{\varphi\circ\psi(N)})$ est constante à partir d'un certain rang.
Donc $(p_{\varphi\circ\psi(N)})$ est à son tour bornée, donc, possède une sous-suite convergente $(p_{\varphi\circ\psi\circ\theta(n)})$, donc constante àpcr. Donc $\dfrac{p_{\varphi\circ\psi\circ\theta(n)}}{q_{\varphi\circ\psi\circ\theta(n)}}$ est constante àpcr et converge vers x, absurde.
Donc $q_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, d'où une infinité de $q_N \in [\![1, n]\!]$ vérifiant
$$\left|x - \frac{p_N}{q_N}\right| \leqslant \frac{1}{Nq_N} \leqslant \frac{1}{q_N^2}.$$

2.4 Caractérisations séquentielles

Exercice 22. ●●○ Soit A la partie de $\mathbb{R}$ suivante :
$$A = \left\{\frac{nm}{n^2+m^2+1}, (n, m) \in \mathbb{N}^2\right\}.$$

1. Montrer que A possède une borne supérieure.

Correction

Pour tous entiers m et n, $nm \leqslant (n+m+1)^2$, donc A est majorée par 1. Non vide, cette partie de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

2. Déterminer la borne supérieure de A.

Correction

Montrons que $\sup(A) = \frac{1}{2}$.
Déj§a, si m et n sont deux entiers, on sait que $(m-n)^2 \geqslant 0$, donc $m^2+n^2 \geqslant 2mn$, donc $2mn < m^2+n^2+1$, donc $\frac{mn}{m^2+n^2+1} < \frac{1}{2}$. Donc $\frac{1}{2}$ est un majorant de A.
Définissions la suite u_n par, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{n^2}{2n^2+1}.$$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$. Donc on a bien $\frac{1}{2} = \sup(A)$.

3. Montrer que A n'a pas de plus grand élément.

Correction

Cette borne supérieure n'est jamais atteinte car si m et n sont des entiers,

$$2mn < m^2+n^2+1.$$

Exercice 23. ●○○ Montrer que l'ensemble

$$\left\{\frac{n}{2^m}, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\right\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction

Soit x un réel. Montrons que la suite $u_n = \frac{[2^n x]}{2^n}$ converge bien vers x. On sait que

$$x - \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{[2^n x]}{2^n} \leqslant x.$$

Donc, par théorème d'encadrement, on a le résultat voulu.

2.5 Suites récurrentes

Exercice 24. ●○○ – ●●● Déterminer l'expression du terme général des suites définies par :

1. $\begin{cases} u_0 = -1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - 4, \end{cases}$

2. $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = 2x_n + 3\,;$

3. $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \dfrac{1}{3}(x_n + 1)$;

4. $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_1 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2(u_{n+1} - u_n), \end{cases}$

5. $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_1 = 2i, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2(i+1)u_{n+1} - 2iu_n, \end{cases}$

6. $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$;

7. $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$;

8. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = n \end{cases}$

9. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} + 2u_n = n^2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_1 \in \mathbb{R}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + n + 1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{u_{n+2}} = \dfrac{1}{u_{n+1}} + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$ (on commencera par montrer que la suite est toujours définie et on introduira une suite auxilliaire)

Correction

1. Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. Cherchons c tel que $c = 3c - 4$, c'est-à-dire $c = 2$. Alors la suite $(u_n - 2)$ est géométrique de raison 3, donc pour tout entier n,
$$u_n = (u_0 - 2)3^n + 2 = -3^{n+1} + 2.$$
2. Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. Cherchons c tel que $c = 2c + 3$, c'est-à-dire $c = -3$. Alors la suite $(x_n + 3)$ est géométrique de raison 2, donc pour tout entier n,
$$x_n = (x_0 + 3)2^n - 3.$$
3. De même, on cherche c tel que $c = \dfrac{1}{3}(c+1)$ donc $c = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, $x_n = \dfrac{1}{2} + \left(x_0 - \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
4. Il s'agit d'une suite récurrence linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $r^2 - 2r + 2 = 0$, de racines $1 \pm i$, de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\pm\dfrac{\pi}{4}$. Donc on dispose de λ et μ réels tels que pour tout n dans $\mathbb{N}$,
$$u_n = \lambda\sqrt{2}^n \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \mu\sqrt{2}^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right).$$
Comme $u_0 = 1$, $\mu = 1$ et comme $u_1 = 0$,
$$\lambda\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

i.e. $\lambda = -1$, donc pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$u_n = \sqrt{2}^n \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right).$$

5. Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est

$$r^2 - 2(i+1)r + 2iu_n,$$

de discriminant $4(1+i)^2 - 8i = 0$, de racine double $1+i$, donc on dispose de λ et μ complexes tels que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$u_n = (\lambda + \mu n)(1+i)^n.$$

Comme $u_0 = 1$, $\lambda = 1$, et comme $u_1 = 2i$, $(\lambda+\mu)(1+i) = 2i$ donc $\lambda + \mu = 1 + i$ donc $\mu = i$. Finalement, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$u_n = (1+ni)(1+i)^n.$$

6. Posons $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$\begin{cases} v_0 = 1, \\ v_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \end{cases}$$

Donc v_n est la suite de Fibonacci au rang $n+1$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \phi'^n),$$

où $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\phi' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Donc pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{\sqrt{5}}{\phi^n + \phi'^n}.$$

7. L'équation caractéristique liée à la relation de récurrence est

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

i.e. $(x-2)(x-3) = 0$. Donc l'équation possède deux racines réelles, et donc le trme général de (x_n) est

$$x_n = A.2^n + B.3^n,$$

où A et B sont des réels.

8. L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence est

$$x^2 - 4x + 4 = 0,$$

i.e. $(x-2)^2 = 0$. L'équation possède donc une racine double : 2, et le terme général de (x_n) est

$$x_n = (An + B)2^n,$$

où A et B sont des réels.

9. Fait en cours.
10. Étudions d'abord la relation de récurrence : $u_{n+1}+2u_n=n^2$. Pour ce faire, trois possibilités :
    - Soit on essaie, à tâtons, de chercher une formule que l'on va démontrer par récurrence.
    - Soit on essaie de calquer la méthode de variation de la constante. On résout l'équation homogène, on trouve des solutions de la forme $u_n=A(-2)^n$, où A est réel. On écrit alors $A=A_n$ et on cherche les solutions de l'équation avec second membre sous la forme $u_n=A_n(-2)^n$. On a alors $u_{n+1}=-2A_{n+1}(-2)^n$, et donc
    $$u_{n+1}+2u_n=(A_{n+1}-A_n)(-2)^{n+1},$$
    donc
    $$A_{n+1}-A_n=\frac{n^2}{(-2)^{n+1}}.$$
    Donc, par télescopage,
    $$A_n=A_0+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^2}{(-2)^{k+1}}.$$
    Donc $u_n=(-2)^n\left(A_0+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^2}{(-2)^{k+1}}\right)$, avec $A_0\in\mathbb{R}$.
    - Troisième possibilité, on commence toujours par résoudre l'équation homogène, de solution générale $A.(-2)^n$, $A\in\mathbb{R}$.
    Ensuite, on détermine une solution particulière en remarquant qu'on a un second membre sous la forme $q^nP(n)$, avec $q=1$ qui n'est pas racine de l'équation caractéristique $x+2=0$! Donc on cherche une solution particulière sous la forme $u_n=an^2+bn+c$. On écrit alors
    $$u_{n+1}+2u_n=an^2+2an+a+bn+b+c+2an^2+2bn+2c=n^2.$$
    Donc
    $$3an^2+(2a+b)n+(a+b+2c)=n^2,$$
    donc $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{2}{3}$ et $c=\frac{1}{6}$. Donc les solutions générales sont de la forme
    $$u_n=A.(-2)^n+\frac{2n^2-4n+1}{6},$$
    avec $A\in\mathbb{R}$.
11. Fait en cours.

Exercice 25. ●●○ On considère la suite définie par $u_0>3$, et $u_{n+1}=\frac{4u_n-9}{u_n-2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. Tracer le graphe de $x\longmapsto\frac{4x-9}{x-2}$, préciser les points d'intersection avec la droite $y=x$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et les valeurs éventuelles de sa limite.

Correction

Pour montrer que (u_n) est bien définie, montrons qu'elle ne s'annule jamais, en montrant par récurrence que u_n est toujours supérieure strictement à 3 $(\mathcal{P}_n)$.
Initialisation. $u_0 > 3$
Hérédité. Supposons $u_n > 3$ pour un certain n. Alors $4u_n - 9 > 3u_n - 6 = 3(u_n - 2)$, donc

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 9}{u_n - 2} > \frac{3(u_n - 2)}{u_n - 2} = 3.$$

Conclusion. Héréditaire et vraie au rang 0, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout entier en vertu du principe de récurrence.

Si u_n converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, u_{n+1} converge aussi vers ℓ. Par règles d'opérations sur les limites u_{n+1} converge aussi vers $\dfrac{4\ell - 9}{\ell - 2}$. Par unicité de la limite, $\ell = \dfrac{4\ell - 9}{\ell - 2}$, donc $\ell^2 - 6\ell + 9 = 0$, i.e. $\ell = 3$. Donc si (u_n) converge, elle converge vers 3.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

Correction

Soit n dans $\mathbb{N}$. Calculons v_{n+1}.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1} - 3} \\ &= \frac{1}{\frac{4u_n - 9}{u_n - 2} - 3} \\ &= \frac{u_n - 2}{4u_n - 9 - 3u_n + 6} \\ &= \frac{u_n - 2}{u_n - 3} = v_n + 1. \end{aligned}$$

Donc (v_n) est arithmétique de raison 1. Donc pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 + n$, avec $v_0 > 0$.

4. Étudier la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction

On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1}{v_n} + 3$, bien définie car $v_n > 0$. Or, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 3$.

Exercice 26. ●●○ Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, telles que $u_0 < v_0$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite à préciser.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

Posons pour tout entier naturel n, $a_n = u_n + v_n$ et $b_n = u_n - v_n$. Montrons que ces deux suites sont géométriques. Soit n dans $\mathbb{N}$. Alors

$$a_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} + \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{3u_n + 3v_n}{3} = a_n.$$

Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $u_0 + v_0$. De même,

$$b_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{1}{3} b_n.$$

Donc $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$: $b_n = b_0 \frac{1}{3^n}$.
Donc pour tout n entier,

$$u_n = \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{u_0 + v_0 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \frac{u_0 + v_0}{2},$$
$$v_n = \frac{a_n - b_n}{2} = \frac{u_0 + v_0 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2} \underset{+\infty}{\longrightarrow} \frac{u_0 + v_0}{2}.$$

Exercice 27. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 > 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante.

Correction

Soit n un entier naturel. Alors $u_{n+1} - u_n = \mathrm{e}^{-u_n} > 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Correction

Croissante, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ou tend vers $+\infty$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie en $+\infty$, alors $\ell = \ell + \mathrm{e}^{-\ell}$, donc $\mathrm{e}^{-\ell} = 0$, ce qui est absurde. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

3. On pose, pour tout n entier, $v_n = \mathrm{e}^{u_n}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_{n+1} - v_n) = 1$.

Correction

On calcule

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \mathrm{e}^{u_n + \mathrm{e}^{-u_n}} - \mathrm{e}^{u_n} \\ &= \mathrm{e}^{u_n}\left(e^{\mathrm{e}^{-u_n}} - 1\right) \end{aligned}$$

Or, si a_n tend vers 0, $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$, donc on écrit

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= e^{u_n}\left(e^{e^{-u_n}} - 1\right) \\ &= \frac{e^{e^{-u_n}} - 1}{e^{-u_n}} \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

4. En utilisant le théorème de Cesàro, calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)}$.

Correction

Par le théorème de Cesàro, si $w_n = v_{n+1} - v_n$, on sait que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} w_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} w_n = 1.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{u_n}}{n} = 1.$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{e^{u_n}}{n}\right) = 0$, i.e. $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(e^{u_n}\right) - \ln(n) = 0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 1.$$

2.6 Un peu d'analyse asymptotique

Exercice 28. ●○○ Classer les suites suivantes par ordre de négligeabilité.

$$a_n = n^3,\ b_n = 4n - n^3,\ c_n = ne^{3n},\ d_n = \sin\frac{1}{n},\ f_n = ne^n,\ g_n = n^3 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),\ h_n = \frac{n^4 - n^2}{\sqrt{n} + \ln(n)}.$$

Correction

On a

$$d_n = o(g_n),\ g_n \sim n^2 = o(h_n),\ h_n = o(a_n),\ a_n = O(b_n) \text{ et } b_n = O(a_n),\ a_n = o(f_n),\ f_n = o(c_n),$$

Exercice 29. ●●○ Déterminer, à l'aide des relations de domination, de négligeabilité, et d'équivalence, les limites des suites suivantes

1. $n\left(\sqrt[3]{n+\pi}-\sqrt[3]{n}\right)$
2. $\dfrac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}(3n)}{\sin\frac{1}{n}}$
3. $\dfrac{\sqrt{1+\sin\frac{1}{n}}-1}{e^{1+\frac{1}{n}}-e}$
4. $\sin\left(\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\times(1+3\sqrt{n})^2$
5. $\dfrac{n^n}{(n+1)^n}$
6. $\dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$

Exercice 30. *Une suite définie implicitement*. ●●○

1. Montrer que sur chacun des intervalles $\left]-\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right[$, $n\in\mathbb{N}$, l'équation $\tan(x)=x$ admet une unique solution x_n.

Correction

Sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right[$, la fonction $x\mapsto\tan(x)-x$ est continue, strictment croissante car de dérivée égale à $\tan^2$, et de limite égale à $+\infty$ (respectivement $-\infty$) en $\dfrac{\pi}{2}+n\pi$ (respectivement $\dfrac{\pi}{2}-n\pi$). Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone aux limites, la fonction $x\mapsto\tan(x)-x$ admet un unique zéro dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right[$.

2. Donner un équivalent simple de x_n.

Correction

Pour tout entier naturel n, $-\dfrac{\pi}{2}+n\pi\leqslant x_n\leqslant\dfrac{\pi}{2}+n\pi$, donc

$$-\frac{1}{2n}+1\leqslant\frac{x_n}{\pi n}\leqslant 1+\frac{1}{2n}.$$

Donc, par théorème d'encadrement, $\dfrac{x_n}{\pi n}\underset{+\infty}{\longrightarrow}1$, i.e. $x_n\sim n\pi$.

3. On pose $y_n=\dfrac{\pi}{2}+n\pi-x_n$.
   (a) Déterminer une équation vérifiée par y_n.

Correction

Calculons $\tan(y_n)$:

$$\begin{aligned}\tan(y_n) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + n\pi - x_n\right) &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right) \text{ car } \tan \text{ est } \pi - \text{périodique.}\\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right)}\\ &= \frac{\cos(x_n)}{\sin(x_n)}\\ &= \frac{1}{\tan(x_n)}\\ &= \frac{1}{x_n}\\ &\sim \frac{1}{n\pi} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

(b) En déduire que $y_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Correction

Donc $\tan(y_n) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, et y_n est dans $]-\pi/2, \pi/2[$, donc y_n tend vers 0.

(c) Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Correction

On déduit de la question précédente que $\tan(y_n) \sim y_n$, donc $\frac{1}{x_n} \sim y_n$, donc $\frac{1}{n\pi} \sim y_n$, i.e. $y_n = \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $\alpha = \frac{1}{pi}$.

Indications

8 Calquer l'exercice fait en cours sur la règle de D'Alembert. Utiliser des ε et comparer à des suites géométriques.

9 (a) Non, considérer $n + 2(-1)^n$.

(b) Reprendre la démonstration du théorème de la limite monotone en considérant l'ensemble des termes de la suite.

(c) De même !

10 Tenter d'encadrer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}]$.

11 Repasser très précisément aux ε, et utiliser notamment le fait que $b - v_n \geqslant 0$ pour tout n.

12 Penser à une étude de fonctions pour la première question, à un télescopage pour la seconde.

 nlaillet.math@gmail.com

13 Penser : aux « quantités conjuguées »] pour les racines, aux formes exponentielles, et aux encadrements pour les sommes. Les (iv), (v), (vii) sont à faire à la fin, beaucoup plus difficiles !

14 Déclarez bien vos variables.

15 Penser aux exemples vus en cours avec l'exponentielle.

16 (a) La suite est bornée...

(b) Utiliser une formule de trigonométrie pour $\cos(a+b)$.

(c) Utiliser une formule de trigonométrie pour $\sin(a+b)$, et penser que $\cos^2+\sin^2=1$.

?? Penser à faire des encadrements : $\lfloor x\rfloor] \leqslant x < \lfloor x\rfloor] + 1$ **et**] $x-1 < \lfloor x\rfloor] \leqslant x$. Penser que pour n dans $\mathbb{N}$, $\lfloor n\rfloor] = n$. Penser enfin que $x \mapsto \lfloor x\rfloor]$ est croissante.

17 Effectuer encore des encadrements.

18 Distinguer les cas $\ell \in \mathbb{Z}$ et $\ell \neq Z$. Penser que si $\ell \neq \mathbb{Z}$, $\exists \varepsilon > 0$, $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ ne contient aucun entier (le justifier).

19 Nier proprement les énoncés et construire des suites extraites comme en cours, par récurrence.

20 Faire de l'absurde... en supposant que $q_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} +\infty$.

- montrer qu'il existe une sous-suite de (q_n) bornée.
- montrer qu'il existe une sous-suite de (q_n) convergente.
- montrer qu'il existe une sous-suite de (q_n) constante.

24 Toujours commencer par calculer les premiers termes, sauf si vous reconnaissez des suites vues en cours (arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2, etc.)

25 La bonne définition se montre par récurrence. Pour les limites, utliser les règles sur la convergence.

26 Essayer d'étudier $u_n + v_n$ et $u_n - v_n$ et déterminer la limite de chacune de ces suites.

27 Utiliser le théorème de la limite monotone pour la 2. Pour la 3, factoriser par e^{u_n}] et utliser des taux de variation pour reconnaître une dérivée.

28 C'est du cours (croissances comparées). Penser à faire un équivalent avant de comparer !

30 (a) Utiliser le théorème de la bijection

(b) Utiliser le théorème d'encadrement pour les équivalents.

(c) Penser aux formules liant $\tan(x)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.