TD 8
Nombres réels et suites

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. *Moyenne de Cesàro, exercice ultra-classique*. ●●○
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier n par $S_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, avec $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ell$. On commencera par $\ell = 0$.
2. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.
3. Les réciproques des deux énoncés précédents sont-elles vraies ?

Exercice 2. *Moyenne arithmético-géométrique*. ●◐○ Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = a,\ v_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}. \end{cases}$$

Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers la même limite.

Exercice 3. *Vers le critère de d'Alembert*. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, avec ℓ un réel.

1. Montrer que si $\ell < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. Montrer que si $\ell > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. Que peut-on dire si $\ell = 1$?

Exercice 4. ●●◐ Soit (u_n) une suite réelle.

1. On suppose (u_{2n}), (u_{2n+1}) convergentes de même limite. Montrer que (u_n) converge.
2. On suppose (u_n) croissante et (u_{2n}) convergente. Montrer que (u_n) converge.
3. On suppose (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 5. ●●○ On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.
2. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6. ●○○ Soit (u_n) une suite décroissante de réels telle que $u_n + u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ainsi qu'un équivalent en $+\infty$.

Exercice 7. ●●○ Déterminer, à l'aide des relations de domination, de négligeabilité, et d'équivalence, les limites des suites suivantes

1. $\dfrac{\sin \frac{1}{n}}{\tan \frac{1}{2n}}$
2. $\dfrac{n^4 - 2n^{5/2} + n\sqrt{n} - \ln(n)}{n + 3n^2 \sin \frac{1}{\sqrt{n}} - n\ln(n)}$
3. $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$
4. $(1 + nx)^{\frac{1}{n}}$
5. $\dfrac{1 - e^{\frac{3}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1}$
6. $\dfrac{n^3 \sin \frac{3}{1+n}}{\text{Arctan} \frac{1}{8n^2} e^{\sqrt{n}}}$

2 Exercices à travailler en TD

Plan de travail, par méthodes et techniques à connaître

- déterminer des limites : exercices 10, 12, 13, 14, 15.
- manipuler des parties entières : exercices 17, 18.
- manipuler des suites extraites : exercice 19.
- manipuler des ε (pour revenir à la définition de la convergence par exemple) : exercices corrigés en classe 3 et 1, exercices 18, 8.
- étudier des suites récurrentes : exercices faits en classe 2 et 5, exercices 24, 25, 26, 27.

2.1 Epsiloneries

Exercice 8. *Vers le critère de Cauchy pour les séries.*. ●●○ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = \ell$, avec ℓ un réel.

1. Montrer que si $\ell < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. Montrer que si $\ell > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. Que peut-on dire si $\ell = 1$?

Exercice 9. *Une propriété de limite monotone*. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N} : [p \geqslant n \text{ et } (\forall q \in \mathbb{N}, q \geqslant p \Rightarrow u_q \geqslant u_n)]$$

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ?
2. Montrer en revanche que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une propriété « de limite monotone » : si elle est majorée elle converge, et si elle n'est pas majorée, elle tend vers $+\infty$.

2.2 Théorèmes généraux sur les suites et les limites

Exercice 10. ●○○ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1,\ 0 \leqslant v_n \leqslant 1 \text{ et } u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Que dire de ces suites ?

Exercice 11. ●●○ Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, (u_n) et (v_n) deux suites telles que

$$\begin{cases} n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant a \text{ et } v_n \leqslant b \\ u_n + v_n \to a + b \end{cases}$$

Montrer que $u_n \to a$ et $v_n \to b$.

Exercice 12. ●○○

1. Démontrer que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.
2. Déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 13. ●○○ /●●○ Déterminer les limites en $+\infty$ des suites de terme général

1. $\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$
2. $\sqrt[n]{n^2}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}$
4. $\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$
5. $\dfrac{\sin(2n)}{\mathrm{th}(3n)}$
6. $\dfrac{n^n}{n!}$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor kx \rfloor}{n^2}$

Exercice 14. *Problème d'interversion des limites.* ●◐○
Comparer

$$\lim_{k\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^k, \quad \lim_{n\to+\infty} \lim_{k\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^k \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

Exercice 15. *Sur l'indétermination 1^∞.* ●◐○
Soit ℓ un élément de $\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Déterminer deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$, et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^{v_n} = \ell$.

Exercice 16. ●●○ On va démontrer que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite. On suppose que c'est le cas et qu'elle en possède une.

1. Démontrer que cette limite est finie. On l'appelle ℓ.
2. Démontrer que la suite $(\cos(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, puis que $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Aboutir à une contradiction en échangeant les rôles de sin et de cos.

Exercice 17. ●●○ Soient a, b, c trois réels tels que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\lfloor an \rfloor + \lfloor bn \rfloor = \lfloor cn \rfloor .$$

Démontrer que $a + b = c$.

Exercice 18. ●●◐ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels convergeant vers une limite ℓ réelle. A-t-on

$$\lim_{n\to+\infty} \lfloor u_n \rfloor = \lfloor \ell \rfloor \ ?$$

2.3 Du côté des sous-suites

Exercice 19. ●●○ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. Montrer qu'elle admet une suite extraite qui diverge vers $+\infty$.
2. On suppose que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite bornée.

Exercice 20. ●●◐ Soient $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\dfrac{p_n}{q_n}$ converge vers un irrationnel x.
Démontrer que $q_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et que $|p_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
On pourra procéder par l'absurde et par extractions de suites.

Exercice 21. *Approximation diophantienne*. ●●◐ Si y est un réel, on appelle partie fractionnaire de y la quantité, notée $\{y\}$ et définie par $\{y\} = y - \lfloor y \rfloor$. Soit x un réel.

1. Démontrer que : $\forall N \in \mathbb{N},\ \exists (p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant q \leqslant N,\ \left| x - \dfrac{p}{q} \right| \leqslant \dfrac{1}{qN}$.
   On appliquera le principe des tiroirs à $0, \{x\}, \{2x\}, \dots, \{Nx\}$.
2. En déduire qu'il existe une infinité de couples (p,q) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tels que $\left| x - \dfrac{p}{q} \right| \leqslant \dfrac{1}{q^2}$.

2.4 Caractérisations séquentielles

Exercice 22. ●●○ Soit A la partie de $\mathbb{R}$ suivante :

$$A = \left\{ \frac{nm}{n^2+m^2+1}, (n,m) \in \mathbb{N}^2 \right\}.$$

1. Montrer que A possède une borne supérieure.
2. Déterminer la borne supérieure de A.
3. Montrer que A n'a pas de plus grand élément.

Exercice 23. ●○○ Montrer que l'ensemble

$$\left\{ \frac{n}{2^m}, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \right\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$.

2.5 Suites récurrentes

Exercice 24. ●○○ – ●●● Déterminer l'expression du terme général des suites définies par :

1. $\begin{cases} u_0 = -1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - 4, \end{cases}$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = 2x_n + 3\,;$
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \dfrac{1}{3}(x_n + 1)\,;$
4. $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_1 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2(u_{n+1} - u_n), \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_1 = 2i, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2(i+1)u_{n+1} - 2iu_n, \end{cases}$
6. $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0\,;$

7. $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$;

8. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = n \end{cases}$

9. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} + 2u_n = n^2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_1 \in \mathbb{R}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + n + 1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{u_{n+2}} = \dfrac{1}{u_{n+1}} + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$ (on commencera par montrer que la suite est toujours définie et on introduira une suite auxilliaire)

Exercice 25. ●●○ On considère la suite définie par $u_0 > 3$, et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 9}{u_n - 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Tracer le graphe de $x \longmapsto \dfrac{4x-9}{x-2}$, préciser les points d'intersection avec la droite $y = x$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et les valeurs éventuelles de sa limite.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
4. Étudier la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 26. ●●○ Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, telles que $u_0 < v_0$ et, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3},\ \ v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$
Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite à préciser.

Exercice 27. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 > 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. On pose, pour tout n entier, $v_n = \mathrm{e}^{u_n}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_{n+1} - v_n) = 1$.
4. En utilisant le théorème de Cesàro, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\ln(n)}$.

2.6 Un peu d'analyse asymptotique

Exercice 28. ●○○ Classer les suites suivantes par ordre de négligeabilité.

$$a_n = n^3,\ b_n = 4n - n^3,\ c_n = n\mathrm{e}^{3n},\ d_n = \sin\frac{1}{n},\ f_n = n\mathrm{e}^n,\ g_n = n^3 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),\ h_n = \frac{n^4 - n^2}{\sqrt{n} + \ln(n)}.$$

Exercice 29. ●●○ Déterminer, à l'aide des relations de domination, de négligeabilité, et d'équivalence, les limites des suites suivantes

1. $n\left(\sqrt[3]{n+\pi}-\sqrt[3]{n}\right)$
2. $\dfrac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}(3n)}{\sin\frac{1}{n}}$
3. $\dfrac{\sqrt{1+\sin\frac{1}{n}}-1}{\mathrm{e}^{1+\frac{1}{n}}-\mathrm{e}}$
4. $\sin\left(\tan\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\times(1+3\sqrt{n})^2$
5. $\dfrac{n^n}{(n+1)^n}$
6. $\dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$

Exercice 30. *Une suite définie implicitement.* ●●○

1. Montrer que sur chacun des intervalles $\left]-\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right[$, $n\in\mathbb{N}$, l'équation $\tan(x)=x$ admet une unique solution x_n.
2. Donner un équivalent simple de x_n.
3. On pose $y_n=\dfrac{\pi}{2}+n\pi-x_n$.
   (a) Déterminer une équation vérifiée par y_n.
   (b) En déduire que $y_n\underset{+\infty}{\longrightarrow}0$.
   (c) Déterminer $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que
$$x_n=n\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Indications

8 Calquer l'exercice fait en cours sur la règle de D'Alembert. Utiliser des ε et comparer à des suites géométriques.

9 (a) Non, considérer $n+2(-1)^n$.
(b) Reprendre la démonstration du théorème de la limite monotone en considérant l'ensemble des termes de la suite.
(c) De même !

10 Tenter d'encadrer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}]$.

11 Repasser très précisément aux ε, et utiliser notamment le fait que $b-v_n\geqslant 0$ pour tout n.

12 Penser à une étude de fonctions pour la première question, à un télescopage pour la seconde.

13 Penser : aux « quantités conjuguées »] pour les racines, aux formes exponentielles, et aux encadrements pour les sommes. Les (iv), (v), (vii) sont à faire à la fin, beaucoup plus difficiles !

14 Déclarez bien vos variables.

15 Penser aux exemples vus en cours avec l'exponentielle.

16 (a) La suite est bornée...
(b) Utiliser une formule de trigonométrie pour $\cos(a+b)$.
(c) Utiliser une formule de trigonométrie pour $\sin(a+b)$, et penser que $\cos^2+\sin^2=1$.

?? Penser à faire des encadrements : $\lfloor x\rfloor]\leqslant x<\lfloor x\rfloor]+1$ **et** $x-1<\lfloor x\rfloor]\leqslant x$. Penser que pour n dans $\mathbb{N}$, $\lfloor n\rfloor]=n$. Penser enfin que $x\mapsto\lfloor x\rfloor]$ est croissante.

17 Effectuer encore des encadrements.

18 Distinguer les cas $\ell\in\mathbb{Z}$ et $\ell\neq Z$. Penser que si $\ell\neq\mathbb{Z}$, $\exists\varepsilon>0$, $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$ ne contient aucun entier (le justifier).

19 Nier proprement les énoncés et construire des suites extraites comme en cours, par récurrence.

20 Faire de l'absurde... en supposant que $q_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} +\infty$.

- montrer qu'il existe une sous-suite de (q_n) bornée.
- montrer qu'il existe une sous-suite de (q_n) convergente.
- montrer qu'il existe une sous-suite de (q_n) constante.

24 Toujours commencer par calculer les premiers termes, sauf si vous reconnaissez des suites vues en cours (arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2, etc.)

25 La bonne définition se montre par récurrence. Pour les limites, utliser les règles sur la convergence.

26 Essayer d'étudier $u_n + v_n$ et $u_n - v_n$ et déterminer la limite de chacune de ces suites.

27 Utiliser le théorème de la limite monotone pour la 2. Pour la 3, factoriser par e^{u_n}] et utliser des taux de variation pour reconnaître une dérivée.

28 C'est du cours (croissances comparées). Penser à faire un équivalent avant de comparer !

30 (a) Utiliser le théorème de la bijection

(b) Utiliser le théorème d'encadrement pour les équivalents.

(c) Penser aux formules liant $\tan(x)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.