

TD 10

Limites de fonctions – continuité

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. ●○○ Déterminer la limite des quantités suivantes au point indiqué.

1. $\frac{x}{[x]}$ en $+\infty$.
2. $\frac{\sin(x)}{\operatorname{sh}(x)}$ en 0 et en $+\infty$
3. $(x^x)^x$ et $x^{(x^x)}$ en 0
4. $x^a \ln(1 + \sin(x^2))$ en 0 (en fonction de la valeur de $a \in \mathbb{R}$)
5. $\frac{e^x - e^2}{\ln(x) - \ln(2)}$ en 2.
6. $\sin(x)^x - 1$, puis $\cos(\sqrt{x})$, puis $\sin(x)^x - \cos(\sqrt{x})$ en 0.
7. $\sin(x)^x - 1$, puis $\cos(x)$, puis $\sin(x)^x - \cos(x)$ en 0.
8. $\left(\frac{a+x}{x}\right)^x$ en 0 et en $+\infty$, où a est un réel strictement positif.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , continues en 0 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x).$$

Exercice 3. Soit $f : x \mapsto \frac{x \ln(x)}{x-1}$. Donner l'ensemble de définition de f et étudier son (ses) éventuel(s) prolongement(s) par continuité possible(s).

Correction

$x \mapsto \frac{x \ln(x)}{x-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ par les théorèmes généraux.

En 0, on a $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x)}{x-1} = 0$, donc la fonction est prolongeable par continuité en 0.

En 1, on écrit $\frac{x \ln(x)}{x-1} = \frac{(y+1) \ln(y+1)}{y}$ avec $y = x-1$. Or,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(y+1) - \ln(1)}{y+1-1} = \ln'(0+1) = 1.$$

Donc $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y+1) \ln(y+1)}{y} = 1$. Donc la fonction est prolongeable par continuité en 1.

Exercice 4. Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$.

1. On suppose que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Montrer que f admet un point fixe dans $[a, b]$.

Correction

Définissons la fonction g de $[a, b]$ dans \mathbb{R} par $\forall x \in [a, b], g(x) = f(x) - x$. Alors g est continue, $g(a) = f(a) - a \geq 0$ car $f(a) \in [a, b]$, et $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Donc g change de signe sur $[a, b]$, donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule sur $[a, b]$, donc il existe x_0 dans $[a, b]$ tel que $g(x_0) = 0$, i.e. $f(x_0) = x_0$.

2. On suppose maintenant que $[a, b] \subset f([a, b])$. Montrer que f admet un point fixe dans $[a, b]$.

Correction

On sait que $[a, b] \subset f([a, b])$, donc on dispose de α et β dans $[a, b]$ tels que $a = f(\alpha)$ et $b = f(\beta)$. Supposons $\alpha \leq \beta$ et définissons la fonction g sur $[a, b]$ comme précédemment. Alors $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = a - \alpha \leq 0$ car $\alpha \in [a, b]$. De même, $g(\beta) = f(\beta) - \beta = b - \beta \geq 0$ car $\beta \in [a, b]$. Donc g change de signe sur $[\alpha, \beta]$, donc par le TVI il existe x_0 dans $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ tel que $g(x_0) = 0$, i.e. $f(x_0) = x_0$.

2 Exercices à faire en TD

Plan de travail Ici, trois types d'exercices :

1. Des exercices uniquement sur les limites : l'exercice 5 est du même type que ??.
2. Dans les premiers exercices sur la continuité (sous-section 2.2), il n'y a jamais à utiliser de ε : les plus importants sont les 8 et 9. Les exercices 10 et 11 sont du même type que 3 (à faire si l'exercice 3 a mal été compris).
3. Enfin, la dernière section, 2.3, permet d'utiliser les théorèmes généraux sur la continuité (comme l'exercice 4) : les plus importants sont les 14, 15 et 16, qui permettent de réviser les théorèmes importants de cours.

2.1 Limites

Exercice 5. ○○○ - ●○○ Déterminer les limites suivantes, quand elles existent. Si la limite n'existe pas, montrer pourquoi elle n'existe pas.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) \ln(\ln(x))$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{\sin(x)}$

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(\ln(x+1)) - \sin(\ln(x))$

Correction

1. On multiplie par la quantité conjuguée pour écrire

$$\begin{aligned}\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) &= \sqrt{x} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. Fait en cours, la fonction n'a pas de limite !

3. On sait que pour tout y , $y \ln(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$, donc, comme $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$, $\ln(x) \ln(\ln(x)) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$.

4. On sait que pour tout x dans \mathbb{R}^* ,

$$\frac{1}{x} - 1 \leq \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}.$$

Si $x > 0$,

$$1 - x \leq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1,$$

donc, par encadrement, $x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$. De même, si $x < 0$,

$$1 - x \geq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geq 1,$$

donc, par encadrement, $x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 1$.

Donc, comme 0 n'est pas dans l'ensemble de définition de $x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$, on en déduit que

$$x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

5. Soit $x > 1$. Alors $\frac{1}{x} \in [0, 1[$ donc $x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$, donc $x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$ sur un voisinage de $+\infty$

donc $x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

6. On sait que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin(x) = 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) = 0^+$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 1}{\sin(x)} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1}{\sin(x)} = +\infty.$$

7. Pour tous réels p et q , $\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$, donc

$$\begin{aligned}\sin(\ln(x+1)) - \sin(\ln(x)) &= 2 \sin\left(\frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{2}\right) \cos\left(\frac{\ln(x+1) + \ln(x)}{2}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) \cos\left(\frac{\ln(x(x+1))}{2}\right).\end{aligned}$$

Or, $\cos\left(\frac{\ln(x(x+1))}{2}\right)$ est borné et $\sin\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc $\sin(\ln(x+1)) - \sin(\ln(x)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 6. ●○○ Déterminer les limites suivantes à l'aides de relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{-x} + x^2}{x - \ln x}$

Correction

$$\frac{xe^{-x} + x^2}{x - \ln x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2}{x} = x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^3(x)}{1 - \sqrt{1 + 3x^3}}$

Correction

Ici, on peut utiliser les équivalents usuels.

$$\frac{\sin^3(x)}{1 - \sqrt{1 + 3x^3}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{-\frac{3x^3}{2}} = -\frac{2}{3}$$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x - x}{x + \cos x}$

Correction

$$\frac{x \ln x - x}{x + \cos x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x \ln(x)}{x} = \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

6. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x-2)}{e^x - e^3}$

Correction

Ici, il faut faire une translation pour revenir au point en lequel on prend les équivalents.

$$\frac{\ln(x-2)}{e^x - e^3} = \frac{\ln(1 + (x-3))}{e^3(e^{x-3} - 1)}$$

On pose alors $y = x - 3$. On a donc, quand $x \rightarrow 3$, $y \rightarrow 0$. Donc

$$\frac{\ln(1 + (x-3))}{e^3(e^{x-3} - 1)} = \frac{\ln(1 + y)}{e^3(e^y - 1)} \underset{y \rightarrow 0}{\sim} \frac{y}{e^3 \times y} = e^{-3}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x-2)}{e^x - e^3} = e^{-3}$.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{xe^x - x^2}}{e^x + e^{-x}}$

Correction

$$\frac{\sqrt{xe^x - x^2}}{e^x + e^{-x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{xe^x}}{e^x} = \sqrt{\frac{x}{e^x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin^3(x)}{1 - \sqrt{1 + 3x^3}}$

Correction

Attention au point en lequel on prend les

$$\frac{\sin^3(x)}{1 - \sqrt{1 + 3x^3}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sin^3(x)}{-\sqrt{3x^3}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$

Exercice 7. ●●○ Déterminer toutes les $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, |f(x) - f(y)| \leq \frac{x}{y}$.

Correction

On procède par analyse-synthèse.

Analyse. Soit f une fonction vérifiant la relation précédente. Soit y dans \mathbb{R} . Alors pour tout x dans \mathbb{R}_+^* , $|f(x) - f(y)| \leq \frac{x}{y}$. En faisant tendre x vers 0 et par encadrement, on obtient que f admet une limite quand x tend vers 0, égale à $f(y)$. Ceci étant valable pour tout y de \mathbb{R}_+^* , on déduit, par unicité de la limite, que la fonction f est constante.

2.2 Continuité : définition

Exercice 8. ●○○ Étudier la continuité des applications suivantes :

1. $f : x \mapsto x + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$,

Correction

Si $a \notin \mathbb{Z}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue en a , donc, par les théorèmes généraux, f est continue en a .

Si $a \in \mathbb{Z}$, alors $\lim_{x \rightarrow a^-} \lfloor x \rfloor = a - 1$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} \lfloor x \rfloor = a$, donc

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = a + \sqrt{a - (a - 1)} = a + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = a + \sqrt{a - a} = a.$$

Donc les limites à droite et à gauche de f en a sont différentes, donc f n'est pas continue en a .

Elle est en revanche continue par morceaux sur \mathbb{R} .

2. $g : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor - (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

Correction

Si $a \notin \mathbb{Z}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue en a , donc, par les théorèmes généraux, g est continue en a .

Si $a \in \mathbb{Z}$, alors $\lim_{x \rightarrow a^-} \lfloor x \rfloor = a - 1$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} \lfloor x \rfloor = a$, donc

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = a - (a - 1) - (1)^2 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = a - a - (0)^2 = 0,$$

$$g(a) = 0,$$

donc g est continue en a . Donc g est continue sur \mathbb{R} .

Exercice 9. ●○○ Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I . Montrer que $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont continues sur I . On pourra pour cela réutiliser l'expression de \max et \min à l'aide des fonctions usuelles.

Correction

L'exercice est en fait simple si on écrit que $\max(f, g) = \frac{|f - g| + f + g}{2}$ et $\min(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}$. La fonction valeur absolue est continue, donc chacune des deux fonctions est continue!

Exercice 10. ●●○ Étudier la continuité ainsi que le possible prolongement aux bornes des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$

Correction

$x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ est continue en tout point de \mathbb{R}_+^* par les théorèmes généraux. En 0, on étudie

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Donc la fonction est prolongeable par continuité en 0.

2. $x \mapsto (x|\ln(x)| + 1)^{\ln(x)}$

Correction

Pour tout x tel que $x > 0$,

$$(x|\ln(x)| + 1)^{\ln(x)} = \exp(\ln(x) \ln(1 + x|\ln(x)|)).$$

La fonction est définie en $x \neq 0$, et est continue en tout point non nul par les théorèmes généraux. En 0, on sait que pour tout X , $\ln(1 + X) \leq X$, donc

$$|\ln(x)| \ln(1 + x|\ln(x)|) \leq x \ln(x)^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0,$$

donc $(x|\ln(x)| + 1)^{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$, donc est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 11. ●●○ Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'application $f : x \mapsto x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Correction

On sait que si $\alpha > 0$, $x^\alpha \sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc la fonction est prolongeable par continuité si $\alpha > 0$.

Si $\alpha \leq 0$, soient $u_n = \frac{1}{2\pi n}$ et $v_n = \frac{1}{\pi + 2\pi n}$. Alors ces deux suites tendent toutes deux vers

0 et

$$u_n^\alpha \sin \frac{1}{u_n} = (2\pi n)^{-\alpha} \sin(2\pi n) = 0,$$

$$v_n^\alpha \sin \frac{1}{v_n} = (\pi + 2\pi n)^{-\alpha} \sin(\pi + 2\pi n) = (\pi + 2\pi n)^{-\alpha},$$

qui ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc la fonction n'a pas de limite en 0, donc n'y est pas prolongeable par continuité.

Exercice 12. *Quelques équations fonctionnelles.* ●●○

1. Déterminer toutes les $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, f(xy) = f(x) + f(y)$.

Correction

On utilise le fait que les $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, f(xy) = f(x) + f(y)$ sont les fonctions linéaires.

Analyse. Soit f une telle fonction. Posons alors $g : x \mapsto f(e^x)$. Alors g va de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et pour tous x et y dans \mathbb{R} ,

$$g(x + y) = f(e^{x+y}) = f(e^x e^y) = f(e^x) + f(e^y) = g(x) + g(y),$$

et g est continue. Donc g est linéaire, i.e. on dispose de a tel que $g : x \mapsto ax$. Donc si $x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = g(\ln(x)) = a \ln(x)$.

Réciproquement, les $x \mapsto a \ln(x)$ sont toutes solution.

2. Déterminer toutes les $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, f(xy) = f(x)f(y)$.

Correction

De même, on considère $h : x \mapsto \ln(f(x))$ alors h va de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} et pour tous x et y , $h(xy) = \ln(f(xy)) = \ln(f(x)f(y)) = \ln(f(x)) + \ln(f(y)) = h(x) + h(y)$, donc, par la question précédente, on dispose de a tel que $h : x \mapsto a \ln(x)$, donc $f : x \mapsto e^{h(x)} = e^{a \ln(x)} = x^a$. La synthèse se fait de même.

Exercice 13. ●●○ Construire une bijection de $[0, 1]$ dans lui-même discontinue en tout point.

Correction

On définit la fonction f suivante

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 - x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

La fonction est bijective, car $f \circ f = \text{Id}$. Elle est discontinue en tout point sauf en $\frac{1}{2}$. Si on pose $g = f$ sur $[0, 1] \setminus \{0, 1/2\}$, avec $g(0) = \frac{1}{2}$ et $g(1/2) = 0$, on a la fonction désirée.

2.3 Continuité : théorèmes généraux

Exercice 14. ●○○ Soit f une fonction continue sur un intervalle telle que $|f|$ est constante. Montrer que f est constante.

Correction

Supposons que f n'est pas constante. Alors on dispose de x et y tels que $f(x) \neq f(y)$. Mais $|f|$ est constante donc $|f(x)| = |f(y)|$ donc, en particulier, $f(x) \neq 0$ et $f(y) \neq 0$. Mais alors $f(x)$ et $f(y)$ sont de signe (strict) opposé et, par continuité de f et par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe z entre x et y tel que $f(z) = 0$. Mais alors $|f(z)| = 0$, différent de $|f(x)|$ et $|f(y)|$, absurde! Donc f est constante.

Exercice 15. ●●○ Soient f et g deux applications continues sur un segment $[a, b]$ avec $a < b$. On suppose que pour tout x de $[a, b]$, $f(x) < g(x)$.

1. Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\forall x \in [a, b]$, $f(x) + k < g(x)$.

Correction

Considérons l'application $h : x \mapsto g(x) - f(x)$. Alors h atteint son minimum sur $[a, b]$, en un point c . Mais alors $h(c) = g(c) - f(c) > 0$. On pose $k = \frac{h(c)}{2}$. Alors pour tout x dans $[a, b]$, $h(x) \geq h(c) > \frac{h(c)}{2} = k$, donc pour tout x dans $[a, b]$, $f(x) < k + g(x)$.

2. Le résultat reste-t-il vrai si on prend un intervalle ouvert ?

Correction

Non! On prend $x \mapsto 0$ et $x \mapsto x$ sur $]0, 1[$.

Exercice 16. ●●○

1. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe un réel x_0 de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)$.

Correction

Posons $g : x \mapsto f(x) - f\left(x + \frac{1}{2}\right)$. Alors $g(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)$, donc $g(0)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$ sont de signe opposé donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires g s'annule sur $[0, \frac{1}{2}]$ donc il existe x_0 dans $[0, \frac{1}{2}]$ tel que $g(x_0) = 0$, i.e. $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)$.

2. Une personne fait un tour de 6 km en 40 minutes. Montrer qu'il existe une portion de chemin de 3 km qu'elle a parcourue en 20 minutes.

Correction

Soit $f : t \mapsto f(t)$ la distance parcourue par la personne. Soit $g : x \mapsto f(40x) - 6x$.
 Alors $g(0) = 0$, $g(1) = f(40) - 6 = 6 - 6 = 0$ donc on dispose de x_0 tel que $g(x_0) = g\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)$, i.e.

$$f(40x_0) - 6x_0 = f(40x_0 + 20) - 6x_0 - 3,$$

i.e. $f(40x_0 + 20) - f(40x_0) = 3$, donc la personne a parcouru 3 km entre $40x_0$ et $40x_0 + 20$.

3. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que pour tout n dans \mathbb{N}^* , il existe x_0 dans $[0, 1]$ tel que $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right)$.

Correction

Posons $g : x \mapsto f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$. Alors

$$g(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$g\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n}\right)$$

...

$$g\left(1 - \frac{1}{n}\right) = f\left(1 - \frac{1}{n}\right) - f(1),$$

donc $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = f(0) - f(1) = 0$ par télescopage, donc on dispose de k_0 tel que $g\left(\frac{1}{k_0}\right)$ et $g\left(\frac{1}{k_0 + 1}\right)$ sont de signe opposé. Donc, par le TVI, g s'annule entre $\frac{1}{k_0}$ et $\frac{1}{k_0 + 1}$, ce qui démontre le résultat désiré.

4. Montrer en revanche que le résultat précédent est faux si on remplace $\frac{1}{n}$ par $a \in \mathbb{R}$ quelconque.

Correction

Si a n'est pas l'inverse d'un entier, on pose $f : x \mapsto \left| \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right| - x \left| \sin\left(\frac{\pi}{a}\right) \right|$. Alors $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ et si $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x+a) - f(x) &= \left| \sin\left(\frac{\pi(x+a)}{a}\right) \right| - (x+a) \left| \sin\left(\frac{\pi}{a}\right) \right| - \left| \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right| + x \left| \sin\left(\frac{\pi}{a}\right) \right| \\ &= -a \left| \sin\left(\frac{\pi}{a}\right) \right| \neq 0, \end{aligned}$$

d'où f ne vérifie pas : « il existe x_0 dans $[0, 1]$ tel que $f(x_0) = f(x_0 + a)$. »

Exercice 17. ●●○ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \geq a|x - y|.$$

Montrer que f est bijective.

Correction

Montrons que f est injective, puis bijective.

1. f est injective. En effet, soient x et y tels que $f(x) = f(y)$. Alors $a|x - y| \leq 0$, i.e. $x = y$. Donc f est injective.
2. f étant continue, elle est donc strictement monotone. Supposons que f est strictement croissante. On a pour tout x réel

$$a|x| \leq |f(x) - f(0)| \leq |f(x)| + |f(0)| \text{ donc } |f(x)| \geq a|x| - |f(0)| \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} +\infty$$

donc par majoration $\lim_{x \rightarrow -\infty} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty$. Comme f est strictement croissante, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. On en déduit, par le théorème des valeurs intermédiaires aux limites, que f est surjective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Elle est donc bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Exercice 18. ●●○ Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue telle que $f \circ f = f$. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un segment. Décrire l'allure de f .

Correction

Soit $PF(f)$ l'ensemble des points fixes de f . Montrons que $PF(f) = f([0, 1])$.

1. Soit x dans $PF(f)$. Alors $x = f(x)$, donc $x \in f([0, 1])$.
2. Soit $y \in f([0, 1])$, alors on dispose de $x \in [0, 1]$ tel que $y = f(x)$. Mais alors $f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$ donc $y \in PF(f)$.

Donc $PF(f) = f([0, 1])$.

Mais f est continue sur $[0, 1]$, donc elle atteint son minimum m et son maximum M sur $[0, 1]$, donc $f([0, 1]) = [m, M]$. Donc $PF(f) = [m, M]$ est un segment.

Exercice 19. ●●○ Existe-t-il une bijection continue de $[0, 1[$ dans \mathbb{R} ? Une surjection?

Correction

Une bijection continue de $[0, 1[$ dans \mathbb{R} est strictement monotone, donc est majorée ou minorée sur $[0, 1]$ donc ne peut pas être surjective dans \mathbb{R} .

En revanche, si on enlève l'hypothèse d'injectivité, prenons $f : x \mapsto \frac{\sin(1/x)}{x}$. Cette fonction est définie de $]0, 1]$ dans \mathbb{R} et on peut montrer qu'elle n'a pas de limite et n'est pas bornée au voisinage de 0 : si l'on prend $u_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$, alors $f(u_n) = (2\pi n + \pi/2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et si l'on prend $v_n = \frac{1}{2\pi n - \frac{\pi}{2}}$, $f(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$. Cette fonction est donc une bijection de $]0, 1]$ dans \mathbb{R} . Maintenant, en prenant $g : x \mapsto f(1-x)$, on obtient une bijection de $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}!!$

Exercice 20. ●●○ Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. On suppose de plus qu'il existe $n \geq 2$ tel que

$$\forall x \in [0, 1], f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n(x) = x.$$

Montrer que $\forall x \in [0, 1], f(x) = x$. (on s'intéressera à l'injectivité et donc à la monotonie de f).

Correction

Montrons que f est injective. Soient x et y deux réels tels que $f(x) = f(y)$. Alors, si $n \geq 2$, $f^{n-1}(f(x)) = f^{n-1}(f(y))$, i.e. $f^n(x) = f^n(y)$, i.e. $x = y$. Donc f est injective sur $[0, 1]$. Étant continue sur $[0, 1]$, elle est strictement monotone (donc strictement croissante car $f(0) < f(1)$). Soit alors $x \in [0, 1]$. Supposons que $f(x) \neq x$, par exemple $f(x) < x$. Alors par croissance stricte de f , $f^2(x) < f(x)$, donc $f^2(x) < x$. On montre par une récurrence immédiate que pour tout entier k , $f^k(x) < x$. En particulier $f^n(x) < x$, i.e. $x < x$, absurde. D'où le résultat. La preuve s'adapte si $f(x) > x$.

Exercice 21. ●●● Soit f une surjection continue de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} . Montrer que tout réel admet une infinité d'antécédents par f .

Correction

Montrons la proposition suivante :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \forall A > 0, \exists x \geq A, f(x) = y.$$

Cela assurera que chaque réel y a une suite d'antécédents tendant vers $+\infty$: il suffira de construire (x_n) avec x_0 un antécédent de y et pour tout n , x_{n+1} un antécédent de y supérieur à $x_n + 1$.

Soit alors $y \in \mathbb{R}$, $A > 0$. Sur $[0, A]$, f atteint son maximum M et son minimum m .

- Si $y \geq f(A)$, soit $z > M + 1$. Alors z admet un antécédent par f , qui n'est pas dans $[0, A]$. Donc on dispose de x dans $[A, +\infty[$ tel que $f(x) = z$. On a alors $f(A) \leq y \leq f(x)$, donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, on dispose de $x_0 \in [A, x]$ tel que $y = f(x_0)$. D'où la proposition souhaitée.
- Si $y \leq f(A)$ on fait de même avec $z < m - 1$.

Le résultat est donc prouvé.

Indications

- (a) Poser $x' = \frac{x}{2}$.
 - (b) Faire une récurrence.
 - (c) Utiliser la continuité de f en 0.
- Juste bien rédiger.
- Poser $g : x \mapsto f(x) - x$.
 - Deux possibilités : ou bien utiliser le fait que a et b ont des antécédents par f , ou bien utiliser le fait que f atteigne ses bornes.
- Utiliser la quantité conjuguée.
 - Montrer qu'il n'y a pas de limite en utilisant une définition séquentielle.
 - Utiliser proprement les croissances comparées.
 - Faire un encadrement.
 - Se rendre compte qu'un encadrement ne marche pas... Mais que vaut ce terme quand $x > 1$?
 - Différencier les limites en $0+$ et $0-$
 - Que vaut $\sin(p) - \sin(q)$?
- Faire une analyse-synthèse : d'abord fixer y et faire tendre x vers 0, puis conclure.
- Regarder la limite en un point qui n'est pas dans \mathbb{Z} , puis en un point entier en différenciant les limites à gauche et à droite.
- Utiliser la définition du maximum et du minimum en termes de valeurs absolues.
- Utiliser les théorèmes généraux pour les points non problématiques, puis faire des déterminations de limite pour étudier les prolongements par continuité.
- Distinguer les cas $\alpha > 0$ et $\alpha \leq 0$. Pour l'un des deux cas, encadrer, et pour l'autre utiliser la définition séquentielle.
- Essayer, à l'aide de fonctions usuelles, de se ramener à l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
- Essayer de définir une fonction sur les rationnels et sur les irrationnels.
- Raisonnement par l'absurde en supposant que f change de signe, et **faire un dessin** pour comprendre quel théorème utiliser.

15. Utiliser $f - g$ et le fait que cette fonction atteint son maximum et son minimum.
16. **1.** Utiliser $g : x \mapsto f(x) - f\left(x + \frac{1}{2}\right)$.
- 2.** Poser une fonction modélisant le problème et s'annulant en 0 et en 1.
- 3.** Poser $g : x \mapsto f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ et regarder $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$.
- 4.** Utiliser un sin.
17. Montrer que f est injective, puis qu'elle est continue, puis qu'elle est bijective.
18. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est $f([0, 1])$.
19. Pour la bijection, penser à la stricte monotonie. Pour la surjectivité, penser à construire quelque chose à partir de $\frac{\sin(x)}{x}$.
20. Démontrer la stricte monotonie, puis supposer qu'on a un x tel que $x < f(x)$ ou que $f(x) < x$.
21. Montrer que $\forall y \in \mathbb{R}, \forall A > 0, \exists x \geq A, f(x) = y$.