

## TD 11 Structures algébriques

### 1 Exercices corrigés en classe

**Exercice 1.** *Sous-groupes de  $\mathbb{R}$ .* Soit  $H$  un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $H \neq \{0\}$ . Soit  $a = \inf(H \cap \mathbb{R}_+^*)$ .

1. Justifier l'existence de  $a$ .

**Correction**

Comme  $H$  est non trivial, il possède un élément non nul,  $x_0$ . Donc  $x_0$  ou  $-x_0$  est strictement positive, donc  $H \cap \mathbb{R}_+^*$  est non vide. Minoré par 0, il possède une borne inférieure  $a$ .

2. Montrer que si  $a = 0$ , alors  $H$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Correction**

Soit  $x$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Par définition de l'inf, on dispose de  $h \in H$  tel que  $0 < h < \varepsilon$ . Mais alors,

$$\left\lfloor \frac{x}{h} \right\rfloor \leq \frac{x}{h} \leq \left\lfloor \frac{x}{h} \right\rfloor + 1,$$

donc

$$h \left\lfloor \frac{x}{h} \right\rfloor \leq x \leq h \left( \left\lfloor \frac{x}{h} \right\rfloor + 1 \right),$$

donc, en particulier,  $0 \leq x - h \left\lfloor \frac{x}{h} \right\rfloor \leq \varepsilon$ , et  $h \left\lfloor \frac{x}{h} \right\rfloor \in H$ , donc  $H$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

3. Montrer que si  $a > 0$ , alors  $H = a\mathbb{Z} = \{ka, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Correction**

Si  $a > 0$ , montrons que  $a \in H$ . Si ce n'était pas le cas, on disposerait de  $x, y$  dans  $H^2$  tels que  $a < x < y < a + \frac{a}{2}$  (définition de la borne inférieure). Mais alors  $y - x \in H$  et  $0 < y - x < \frac{a}{2}$ , contredit le fait que  $a = \inf H \cap \mathbb{R}_+^*$ .

Donc  $a \in H$ .

Ensuite, par récurrence immédiate et stabilité par  $x \mapsto -x$ ,  $a\mathbb{Z} \subset H$ .

Enfin, si  $x \in H$ , on écrit  $x = a \frac{x}{a} = a \left( \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor + \left\{ \frac{x}{a} \right\} \right)$ . Comme  $a \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \in H$ ,  $a \left\{ \frac{x}{a} \right\} \in H$ .

Mais  $0 \leq \left\{ \frac{x}{a} \right\} < 1$  donc

$$0 \leq a \left\{ \frac{x}{a} \right\} < a.$$

Si  $\left\{ \frac{x}{a} \right\} \neq 0$ , alors on aurait un élément de  $H \cap \mathbb{R}_+^*$  strictement inférieur à  $a$ , absurde.

Donc  $\left\{ \frac{x}{a} \right\} = 0$ , donc  $x = a \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor$ . Donc  $x \in a\mathbb{Z}$ .

D'où l'inclusion réciproque et l'égalité.

**Application** Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Un réel  $T$  est appelé *période* de  $f$  si

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x).$$

4. Montrer que l'ensemble des périodes de  $f$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$ .
5. Soit  $f$  une fonction continue admettant 3 et  $\sqrt{2}$  comme périodes. Montrer que  $f$  est constante.

**Exercice 2.** *Quelques questions indépendantes sur les morphismes de groupes.* Soit  $(G, *)$  un groupe.

1. À quelle condition  $x \mapsto x^{-1}$  est-il un morphisme de groupes ?
2. À quelle condition  $x \mapsto x^2$  est-il un morphisme de groupes ?
3. Démontrer que pour tout  $a$  dans  $G$ ,  $x \mapsto a * x * a^{-1}$  est un automorphisme de  $G$ . Les automorphismes de ce type sont appelés *automorphismes intérieurs* de  $G$ . À quelle condition cet automorphisme est-il l'identité ?

**Exercice 3.** ●○○ Soient

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Décomposer  $\sigma$  en produits de cycles à supports disjoints, en produit de transpositions, la signature de  $\sigma$ , et calculer  $\sigma^{100}$ . Faire de même avec  $\rho$ .

**Correction**

On remarque que  $\sigma = (1\ 3\ 4\ 6) \circ (2\ 5) = \tau_{13}\tau_{34}\tau_{46}\tau_{25}$ . Alors  $\varepsilon(\sigma) = 1$ . De plus on remarque que  $\sigma^4 = \text{Id}$  (et que les puissances plus petites ne donnent pas l'identité). On en déduit que  $\sigma^{100} = (\sigma^4)^{25} = \text{Id}$ .  
 De même,  $\rho = (1\ 4\ 7\ 8) \circ (2\ 6\ 5) \circ (3\ 9) = \tau_{14}\tau_{47}\tau_{78}\tau_{26}\tau_{65}\tau_{39}$ , donc  $\varepsilon(\rho) = 1$  et  $\rho^{12} = \text{Id}$ .  
 Donc  $\rho^{100} = \rho^{8 \times 12 + 4}$  donc  $\rho^{100} = \rho^4 = (2\ 6\ 5)$ .

**Exercice 4.** ●●○ Soit  $n \geq 3$ . Soient  $a \neq b \in \{1, \dots, n\}$  et soit  $\sigma \in S_n$ . Déterminer  $\sigma \circ (a\ b) \circ \sigma^{-1}$ . Généraliser en remplaçant  $(a\ b)$  par un cycle quelconque, puis par une permutation quelconque.

**Correction**

On montre que  $\rho = \sigma \circ (a\ b) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a)\ \sigma(b))$ .  
 Soit  $k$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

- Si  $\sigma^{-1}(k) \notin \{a, b\}$ , alors  $(a\ b) \circ \sigma^{-1}(k) = \sigma^{-1}(k)$ , donc  $\rho(k) = \sigma \circ \sigma^{-1}(k) = k$ .
- Si  $\sigma^{-1}(k) = a$ , i.e.  $k = \sigma(a)$ , alors  $(a\ b) \circ \sigma^{-1}(k) = (a\ b)(a) = b$ , donc  $\rho(k) = \sigma(b)$ , i.e.  $\rho(\sigma(a)) = \sigma(b)$ .
- De même, si  $k = \sigma(b)$ , alors  $\rho(k) = \sigma(a)$ .

Donc  $\rho$  est la transposition qui échange  $\sigma(a)$  et  $\sigma(b)$ .

**Exercice 5.** *Quelques sous-anneaux de  $\mathbb{C}$ .* ●○○

1. Montrer que l'ensemble des entiers de Gauss  $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$  est un sous-anneau de  $(\mathbb{C}, +, \times)$ .

**Correction**

- (a) Déjà  $\mathbb{Z}[i] \neq \emptyset$  car  $1 = 1 + 0.i$  est dans  $\mathbb{Z}[i]$ .
- (b) Ensuite, si  $x$  et  $y$  sont dans  $\mathbb{Z}[i]$ , alors on dispose de  $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$  tels que  $x = z + ib$  et  $y = c + id$ . Alors
- i.  $x - y = (a - c) + i(b - d)$
  - ii.  $x \times y = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad) \in \mathbb{Z}[i]$ .
- Donc  $\mathbb{Z}[i]$  est un sous-anneau de  $(\mathbb{C}, +, \times)$ .

2. Montrer que l'ensemble  $\mathbb{Z}[j] = \{a + jb, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$  est un sous-anneau de  $(\mathbb{C}, +, \times)$ .

**Correction**

- (a) Déjà  $\mathbb{Z}[j] \neq \emptyset$  car  $1 = 1 + 0.j$  est dans  $\mathbb{Z}[j]$ .
- (b) Ensuite, si  $x$  et  $y$  sont dans  $\mathbb{Z}[j]$ , alors on dispose de  $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$  tels que  $x = z + jb$  et  $y = c + jd$ . Alors
- i.  $x - y = (a - c) + j(b - d)$
  - ii.  $x \times y = (a + jb)(c + jd) = ac + j(bc + ad) + j^2bd$ . Mais  $j^2 + j + 1 = 0$  donc  $j^2 = -1 - j$ , donc
- $$x \times y = ac + j(bc + ad) + (-1 - j)bd = (ac - bd) + j(bc + ad - bd) \in \mathbb{Z}[j].$$
- Donc  $\mathbb{Z}[j]$  est un sous-anneau de  $(\mathbb{C}, +, \times)$ .

**Exercice 6.** *Éléments nilpotents d'un anneau : utile pour les chapitres de matrices.* Soit  $(A, +, \times)$  un anneau. Un élément  $x$  de  $A$  est dit **nilpotent** s'il existe  $n$  dans  $\mathbb{N}$  tel que  $x^n = 0_A$ .

1. Si  $A = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , l'ensemble des matrices carrées de taille  $2 \times 2$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$ , donner un élément nilpotent de  $A$ .

On revient au cas général.

1. Démontrer qu'un élément nilpotent n'est pas inversible.
2. Démontrer que si  $x$  et  $y$  sont deux éléments nilpotents tels que  $x \times y = y \times x$ , alors  $x \times y$  et  $x + y$  sont nilpotents.
3. Démontrer que si  $x$  est un élément nilpotent, alors  $1_A - x$  est inversible.

**Exercice 7.** ●●○ Soit  $a$  un élément de  $\mathbb{Q}$  et  $\alpha$  une racine de l'équation  $x^2 = a$ . Montrer que l'ensemble  $\mathbb{Q}[\alpha] = \{q + \alpha r, (q, r) \in \mathbb{Q}^2\}$  muni des lois  $+$  et  $\times$  est un corps.

**Correction**

Montrons qu'il s'agit d'un sous-anneau de  $\mathbb{R}$ , et que chaque élément non nul admet un inverse.

- $\mathbb{Q}[\alpha] \neq \emptyset$  car  $0 \in \mathbb{Q}[\alpha]$ .
- Si  $x$  et  $y$  sont dans  $\mathbb{Q}[\alpha]$ , on dispose de  $q, r, q', r'$  quatre rationnels tels que  $x = q + \alpha r$  et  $y = q' + \alpha r'$ .  
— Montrons que  $x - y \in \mathbb{Q}[\alpha]$ .

$$x - y = q + \alpha r - (q' + \alpha r') = (q - q') + \alpha(r - r') \in \mathbb{Q}[\alpha].$$

— Montrons que  $xy \in \mathbb{Q}[\alpha]$ .

$$\begin{aligned}xy &= (q + \alpha r)(q' + \alpha r') \\ &= qq' + \alpha r q' + \alpha r' q + \alpha^2 r r' \\ &= (qq' + \alpha r r') + \alpha(r q' + r' q).\end{aligned}$$

Or,  $qq' + \alpha r r' \in \mathbb{Q}$  et  $r q' + r' q \in \mathbb{Q}$ , donc  $xy \in \mathbb{Q}[\alpha]$ .

- Soit enfin  $x$  non nul dans  $\mathbb{Q}[\alpha]$ . Son inverse dans  $\mathbb{R}$  est  $\frac{1}{x}$ . Montrons que  $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}[\alpha]$ . On dispose de  $q$  et  $r$  rationnels tels que  $x = q + r\alpha$ . Alors

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{q + r\alpha}$$

Alors soit  $\alpha \in \mathbb{Q}$  et c'est gagné, soit  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  et alors ni  $q + r\alpha$ , ni  $q - r\alpha$  ne sont nuls et

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{q - r\alpha}{(q + r\alpha)(q - r\alpha)} \\ &= \frac{q}{q^2 - ar^2} + \alpha \frac{-r}{q^2 - ar^2},\end{aligned}$$

et  $\frac{q}{q^2 - ar^2} \in \mathbb{Q}$ ,  $\frac{-r}{q^2 - ar^2} \in \mathbb{Q}$ , donc  $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}[\alpha]$ .

Donc  $\mathbb{Q}[\alpha]$  est un corps.

**Stratégie pour les autres exercices.** Ici, trois stratégies :

- vous avez trouvé le cours trop théorique, et vous voulez vous coller au programme officiel : il faut bien apprendre les définitions, refaire les exemples de cours, et faire les exercices 8, 10, 11, 21, 25.
- vous avez bien compris les définitions, les morphismes : faites les exercices 11, 12, 18, 22, 25, 26.
- vous trouvez ces notions vraiment simples : en plus des exercices précédents, les exercices 16, 20, 19 ! Les exercices 23 et 30 sont aussi de niveaux très solides !

## 2 Groupes

**Exercice 8.** Lois de groupe sur  $\mathbb{R}$ . ●○○○

1. Montrer que  $\mathbb{R}$  muni de la loi  $*$  définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3},$$

est un groupe abélien.

### Correction

Déjà,  $*$  est bien une loi de composition interne, car pour tous  $x$  et  $y$  réels,  $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$  est réel.

On remarque aussi qu'elle est commutative : cela nous évitera de faire le double des vérifications pour l'élément neutre et l'inverse.

Ensuite, on montre que  $*$  est associative : soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Alors

$$x * (y * z) = \sqrt[3]{x^3 + (y * z)^3} = \sqrt[3]{x^3 + (\sqrt[3]{y^3 + z^3})^3} = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3} = (x * y) * z,$$

d'où l'associativité.

De plus, 0 est l'élément neutre pour  $*$  : en effet, pour tout  $x$  réel,  $x * 0 = \sqrt[3]{x^3 + 0} = \sqrt[3]{x^3} = x$ .

Enfin, pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $x * (-x) = \sqrt[3]{x^3 + (-x)^3} = \sqrt[3]{x^3 - x^3} = \sqrt[3]{0} = 0$ , donc  $x$  admet un inverse pour  $*$ .

Donc  $(\mathbb{R}, *)$  est bien un groupe.

2.  $\mathbb{R}$  muni de la loi  $\star$  définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \star y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

est-il un groupe ?

#### Correction

Non ! Cette loi ne munit pas  $\mathbb{R}$  d'une structure de groupe, simplement parce que les nombres strictement négatifs n'ont de neutre  $\star$  ! Si  $x = -1$ , alors pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $x \star y = \sqrt{(-1)^2 + y^2} \geq 0$ , donc pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $x \star y \neq x$ .

**Exercice 9.** Groupe des similitudes. ●○○

Montrer que l'ensemble des similitudes directes non dégénérées est un groupe pour la loi de composition.

#### Correction

On considère  $(\mathcal{S}, \circ)$  où  $\mathcal{S}$  est l'ensemble des similitudes directes. On sait par définition que si  $f \in \mathcal{S}$ , il existe  $a$  et  $b$  des complexes tels que  $f$  associe à tout point d'affixe  $z$  le point  $M'$  d'affixe  $z' = az + b$ . Si  $f$  est non dégénérée,  $a \neq 0$ .

- Montrons que  $\circ$  est une loi de composition interne. Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux similitudes directes. Alors on dispose de  $a, b, a', b'$  quatre complexes, avec  $a \neq 0, a' \neq 0$ , tels que  $\varphi$  associe à tout  $M(z)$  le point d'affixe  $az + b$  et  $\psi$  associe à tout  $M(z)$  le point d'affixe  $a'z + b'$ . Alors  $\varphi \circ \psi$  associe à  $M(z)$  le point d'affixe  $a(a'z + b') + b = aa'z + (ab' + b)$ , avec  $aa' \neq 0$ . Donc  $\varphi \circ \psi$  est une similitude directe non dégénérée.
- Montrons que  $\circ$  est associative (le plus embêtant). Soient  $\varphi, \psi, \theta$  trois similitudes,  $a, a', a'', b, b', b''$  les coefficients correspondants et  $M(z)$  un point. Alors l'affixe de  $(\varphi \circ \psi) \circ \theta(M)$  est

$$aa'(a''z + b'') + (ab' + b) = aa'a''z + aa'b'' + ab' + b,$$

et celle de  $\varphi \circ (\psi \circ \theta)(M)$  est

$$a(a'a''z + a'b'' + b') + b = aa'a''z + aa'b'' + ab' + b,$$

d'où l'associativité.

- L'identité est clairement l'élément neutre pour  $\circ$ .
- Soit  $\varphi \in \mathcal{S}$ ,  $a$  et  $b$  ses coefficients. Cherchons un inverse pour  $\varphi$ . Pour ce faire, on cherche  $a', b'$  tels que  $\forall z, aa'z + (ab' + b) = z$ . Posons  $a' = \frac{1}{a}$  (possible car  $\varphi$  non dégénérée), et  $b' = -\frac{b}{a}$ . Alors si  $\psi$  envoie  $M(z)$  sur  $M'$  d'affixe  $a'z + b$ , on a bien  $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \text{Id}$ .  
Donc  $(\mathcal{S}, \circ)$  est un groupe.

**Exercice 10.** ●○○

Montrer que l'ensemble  $\{z \in \mathbb{C}^*, \exists n \in \mathbb{N}^*, z^n = 1\}$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}^*, \times)$ .

**Correction**

Nommons  $\mathcal{U}$  l'ensemble considéré.

- $\mathcal{U}$  n'est pas vide car  $1 \in \mathcal{U}$ .
- Soient  $z$  et  $z'$  dans  $\mathcal{U}$ . Alors on dispose de  $n$  et  $m$  dans  $\mathbb{N}$  tels que  $z^n = 1$  et  $z'^m = 1$ .  
Alors

$$\left(\frac{z}{z'}\right)^{mn} = \frac{z^{mn}}{z'^{mn}} = \frac{(z^n)^m}{(z'^m)^n} = \frac{1}{1} = 1,$$

donc  $\frac{z}{z'} \in \mathcal{U}$ .

Donc  $\mathcal{U}$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}^*, \times)$ .

**Exercice 11.** *Sous-groupes classiques d'un groupe.* ●●○

**Cet exercice doit vous paraître redondant : la deuxième question est incluse dans la première, la troisième dans un exercice déjà fait. Dès que vous vous en rendez compte, passez à autre chose.**

Soit  $(G, \cdot)$  un groupe.

1. Soit  $A$  une partie de  $G$ . On note  $C(A) = \{x \in G, \forall a \in A, x \cdot a = a \cdot x\}$  (centralisateur de  $A$ ).  
Montrer que  $C(A)$  est un sous-groupe de  $G$ .

**Correction**

Utilisons la caractérisation des sous-groupes.

- Déjà  $C(A) \neq \emptyset$  car  $1_G$  appartient à  $C(A)$ .
- Soient ensuite  $x$  et  $y$  dans  $C(A)$ . Montrons que  $x \cdot y^{-1}$  appartient à  $C(A)$ .  
Soit  $a \in A$ .

Montrons que  $y^{-1} \cdot a = a \cdot y^{-1}$ . On sait que

$$y \cdot a = a \cdot y$$

Composons cette égalité à gauche par  $y^{-1}$ . On obtient

$$y^{-1} \cdot y \cdot a = y^{-1} \cdot a \cdot y,$$

$$\text{i.e. } a = y^{-1} \cdot a \cdot y$$

Composons à droite par  $y^{-1}$  pour obtenir

$$a \cdot y^{-1} = y^{-1} \cdot a \cdot y \cdot y^{-1} = y^{-1} \cdot a \cdot 1_G = y^{-1} \cdot a$$

D'où l'égalité souhaitée.

On en déduit donc que

$$x \cdot y^{-1} \cdot a = x \cdot a \cdot y^{-1} = a \cdot x \cdot y^{-1} \text{ car } x \in C(A).$$

Donc  $x \cdot y^{-1} \in C(A)$ . D'où le résultat.

2. On appelle centre de  $G$  l'ensemble  $Z(G) = \{x \in G, \forall y \in G, x \cdot y = y \cdot x\}$ . Montrer que  $Z(G)$  est un sous-groupe de  $G$ , et même qu'il est distingué dans  $G$ , c'est-à-dire que

$$\forall x \in Z(G), \forall y \in G, y \cdot x \cdot y^{-1} \in Z(G).$$

**Correction**

$Z(G) = C(G)$  donc  $Z(G)$  est un sous-groupe de  $G$ . Soient  $x$  dans  $Z(G)$  et  $y$  dans  $Z(G)$ . Alors  $yxy^{-1} = xyx^{-1}$  car  $y \in G$  et  $x$  commute avec  $y$ . Donc  $yxy^{-1} = x \in Z(G)$ . D'où le résultat souhaité !

3. On suppose  $G$  abélien. On dit qu'un élément  $x$  de  $G$  est **de torsion** s'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $x^n = e$ . Démontrer que l'ensemble des éléments de torsion de  $G$  est un sous-groupe de  $G$ .

**Correction**

Appelons  $T$  l'ensemble des éléments de torsion de  $G$ . Alors

- $T$  est non vide car  $e \in T$ ,
- soient  $x$  et  $y$  dans  $T$ . Alors on dispose de  $n$  et  $m$  dans  $\mathbb{N}^*$  tels que  $x^n = e$  et  $y^m = e$ .  
Alors

$$\begin{aligned} (x * y^{-1})^{nm} &= x^{nm} * (y^{-1})^{nm} \text{ car } G \text{ est abélien} \\ &= (x^n)^m * (y^m)^{-n} \\ &= e^m * e^{-n} = e, \end{aligned}$$

donc  $x * y^{-1} \in T$ .

Donc  $T$  est un sous-groupe de  $G$ .

**Exercice 12.** ●●○ Soit  $(G, *)$  un groupe. On note, si  $A$  et  $B$  sont deux sous-groupes de  $G$ ,  $AB = \{a * b, a \in A, b \in B\}$ . Démontrer que  $AB$  est un sous-groupe de  $G$  si, et seulement si  $AB = BA$ .

**Correction**

$\Rightarrow$  Supposons que  $AB$  est un sous-groupe, et montrons que  $AB = BA$ . Soit  $x$  dans  $AB$ . Alors  $x^{-1} \in AB$ . Donc on dispose de  $a$  dans  $A$  et  $b$  dans  $B$  tels que  $x^{-1} = a * b$ . Donc  $x = b^{-1} * a^{-1} \in BA$ . Donc  $AB \subset BA$ .  
De même,  $BA \subset AB$ , d'où l'égalité.

⇐ Supposons que  $AB = BA$ , et montrons que  $AB$  est un sous-groupe de  $G$ .

— Déjà,  $e \in A$ ,  $e \in B$ , donc  $e * e = e \in AB$ .

— Soient ensuite  $x$  et  $y$  dans  $AB$ . Alors on peut écrire  $x = a * b$  et  $y = a' * b'$  où  $(a, a') \in A^2$  et  $(b, b') \in B^2$ . Mais alors  $x * y^{-1} = a * b * b'^{-1} * a'^{-1}$ .

Or,  $b * b'^{-1} \in B$  ( $B$  est un sous-groupe) donc  $b * b'^{-1} * a'^{-1} \in BA = AB$ . Donc on dispose de  $a''$  et  $b''$  dans  $A$  et  $B$  tels que  $b * b'^{-1} * a'^{-1} = a'' * b''$ . Donc  $x * y^{-1} = a * a'' * b'' \in AB$ .

Donc  $AB$  est un sous-groupe de  $G$ .

**Exercice 13.** *Groupe dont tous les éléments sont d'ordre 2.* ●●○ Soit  $(G, *)$  un groupe fini tel que pour tout  $x$  dans  $G$ ,  $x^2 = e$  (où  $e$  désigne le neutre de  $G$ ).

1. Démontrer que  $G$  est abélien.
2. Soit  $H$  un sous-groupe strict de  $G$  et  $x \notin H$ . On note  $xH = \{x * h, h \in H\}$ . Démontrer que  $H \cup xH$  est un sous-groupe de  $G$ . Si  $H$  contient  $p$  éléments, combien  $H \cup xH$  contient-il d'éléments ?
3. ●●● En déduire que le cardinal de  $G$  est une puissance de 2.

**Exercice 14.** ●●○ Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ .

**Correction**

Il y a un point de vue qui permet de trivialisier l'exercice : c'est celui des tables ! Une loi de composition interne se décrit entièrement par une table de composition, avec une double entrée : si  $a_1, \dots, a_n$  sont les éléments de  $E$ , le produit  $a_i * a_j$  se lit avec le coefficient  $(i, j)$  de la table

1. (a) Combien peut-on définir de lois de composition internes sur  $E$  ?

**Correction**

Choisir une loi de composition interne, c'est choisir un tableau rempli avec un élément de  $E$  dans chaque case, d'où  $n^{n^2}$  choix possibles.

- (b) Combien sont commutatives ?

**Correction**

Choisir une loi de composition interne, c'est choisir un tableau rempli avec un élément de  $E$  dans chaque case, tel que la case  $(i, j)$  et la case  $(j, i)$  soient égales, i.e. c'est choisir les éléments du triangle supérieur, d'où  $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$  choix possibles.

- (c) Combien possèdent un élément neutre ?

**Correction**

Choisir une loi de composition interne avec un élément neutre, c'est choisir un élément  $a_{i_0}$  de  $E$  tel que pour tout  $i$ ,  $a_{i_0} a_i = a_i a_{i_0} = a_i$ . D'où la ligne et la colonne  $i_0$  imposées, d'où  $n^{(n-1)^2}$  choix possibles.

2. (a) Combien peut-on définir de relations binaires sur  $E$  ?

**Correction**

Encore une fois, utilisons les tables. Une relation binaire se décrit entièrement par une table de composition, avec une double entrée : si  $a_1, \dots, a_n$  sont les éléments de  $E$ , on remplit la case  $(i, j)$  avec 0 si les éléments ne sont pas en relation, 1 si c'est le cas. On peut donc définir  $2^{n^2}$  relations binaires.

(b) Combien sont réflexives ?

**Correction**

Une relation réflexive est une relation pour laquelle pour tout  $x$ ,  $s\mathcal{R}x$ . Elle se code en imposant la diagonale à 1. D'où  $2^{n^2-n}$  possibilités.

(c) Combien sont symétriques ?

**Correction**

Une relation symétrique revient à prendre une table symétrique, d'où  $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$  possibilités.

**Exercice 15.** Relation de conjugaison. ●●○ Soit  $G$  un groupe. On définit la relation  $\sim$  sur  $G$  par

$$\forall (x, y) \in G, (x \sim y) \Leftrightarrow (\exists g \in G, x = gyg^{-1}).$$

Montrer que  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $G$ .

Lorsque  $G$  est abélien, quelles sont les classes de conjugaison ?

**Correction**

Montrons que la relation  $\sim$  vérifie les trois hypothèses définissant une relation d'équivalence.

- $\sim$  est réflexive.  
Soit  $x \in G$ . Alors  $x = 1_G x 1_G^{-1}$ , donc  $x \sim x$ .
- $\sim$  est symétrique.  
Soient  $(x, y)$  tels que  $x \sim y$ . Alors on dispose de  $g$  dans  $G$  tel que  $x = gyg^{-1}$ . Alors  $y = g^{-1} x g = g^{-1} x (g^{-1})^{-1}$ , donc  $y \sim x$ .
- $\sim$  est transitive.  
Soient  $(x, y, z)$  tels que  $x \sim y$  et  $y \sim z$ . Alors on dispose de  $g$  et  $h$  dans  $G$  tels que

$$x = gyg^{-1} \text{ et } y = hzh^{-1}.$$

Alors

$$x = g(hzh^{-1})g^{-1} = (gh)z(h^{-1}g^{-1}) = (gh)z(gh)^{-1}.$$

Donc  $x \sim z$ . Donc  $\sim$  est transitive.  
 $\sim$  est donc une relation d'équivalence. Lorsque  $G$  est abélien,  $\forall (g, y) \in G^2, gyg^{-1} = y$ , donc les classes d'équivalence sont des points.

**Exercice 16. ●●●**

1. Déterminer tous les sous-groupes finis de  $(\mathbb{C}^*, \times)$ .

**Correction**

(remarque : cet exercice se simplifie encore avec le théorème de Lagrange, qui dit que le cardinal d'un sous-groupe divise le cardinal du groupe).

Soit  $G$  un tel groupe,  $n$  son cardinal,  $a_1, \dots, a_n$  ses éléments. Déjà tous ses éléments sont de module 1 : en effet si on avait  $a \in G$  de module différent de 1, la suite  $(|a|^k)_{k \in \mathbb{N}}$  tendrait soit vers 0, soit vers  $+\infty$ , et  $G$  contiendrait une infinité d'éléments, ce qui est absurde.

Soit  $a$  dans  $G$ . Alors l'ensemble  $\{a^k, k \in \mathbb{N}\}$  est inclus dans  $G$ , donc fini, donc il existe  $k_0$  et  $k_1$  dans  $\mathbb{N}$  tel que  $a^{k_0} = a^{k_1}$  (principe des tiroirs). Donc il existe  $\ell$  tel que  $a^\ell = 1$ . Donc pour tout  $k$  il existe  $\ell_k$  tel que  $a_k^{\ell_k} = 1$ .

Donc en posant  $L = \text{ppcm}(\ell_1, \dots, \ell_k)$ , on a pour tout  $k$   $a_k^L = 1$ , donc  $G$  est un sous-groupe de  $\mathbb{U}_L$ .

Notre but est donc de démontrer qu'en fait,  $G$  est  $\mathbb{U}_n$ .

Pour cela, on utilise le fait que

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{U}_L \\ m \mapsto e^{\frac{2im\pi}{L}} \end{cases}$$

est un morphisme. Donc  $\varphi^{-1}(G)$  est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ . Donc, par le cours, il est de la forme  $a\mathbb{Z}$  avec  $a \in \mathbb{N}^*$ . Donc  $G$  est engendré par un seul élément, de la forme  $e^{\frac{2ia\pi}{L}}$ . Or, si  $M = \frac{L}{a \wedge L}$  et  $b = \frac{a}{a \wedge L}$ ,  $G$  est engendré par  $e^{\frac{2ia\pi}{M}}$ , où  $a \wedge M = 1$ , i.e.  $G = \mathbb{U}_M$  (on a vu dans le cours que si  $a \wedge M = 1$ , alors  $e^{\frac{2ia\pi}{M}}$  engendrait  $\mathbb{U}_M$ ). Comme  $\text{Card}(G) = n$ , on en déduit que  $G = \mathbb{U}_n$ .

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{C}$ . On dit que  $A$  est compacte si de toute suite d'éléments à valeurs dans  $A$ , on peut extraire une sous-suite de  $A$  qui converge **DANS**  $A$ .

2. Les parties suivantes de  $\mathbb{C}$  sont-elles compactes :  $\mathbb{R}$ ,  $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ ,  $\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ ,  $\{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$  ?

**Correction**

- $\mathbb{R}$  n'est pas compacte car  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments à valeurs dans  $\mathbb{R}$  dont aucune sous-suite ne converge.
- $A = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$  est compact, car si  $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ , alors  $(u_n)$  est bornée donc d'après le théorème de BW, on dispose de  $\varphi$  extractrice telle que  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell \in \mathbb{C}$ . Mais  $\forall n, |u_n| \leq 1$  donc  $|\ell| \leq 1$ , donc  $\ell \in A$ .
- $B = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$  n'est pas compacte : si pour tout  $n, u_n = 1 - \frac{1}{n}$ , alors  $(u_n) \in B^{\mathbb{N}}$  et toute suite extraite de  $(u_n)$  tend vers  $1 \notin B$ .

- $\mathbb{Q}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$  n'est pas compacte. Si  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , on dispose de  $(u_n)$  suite de rationnels convergeant vers  $x$ . Donc  $(u_n) \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[i]$  mais toute suite extraite de  $(u_n)$  tend vers  $x \notin \mathbb{Q}[i]$ .

3. ●●● Déterminer tous les sous-groupes compacts de  $(\mathbb{C}^*, \times)$ .

**Correction**

Déjà  $\mathbb{U}$  et les  $\mathbb{U}_n$  sont clairement tous compacts. (le vérifier, mais ce n'est pas compliqué!).

Ensuite, si  $H$  est un sous-groupe compact de  $(\mathbb{C}^*, \times)$ , alors par le même argument que précédemment, on aurait une suite  $(u_n)$  dont la suite des modules tendrait vers  $+\infty$ , et donc  $H$  ne serait pas compact (toute suite extraite de  $(u_n)$  aurait sa suite des modules tendant vers  $+\infty$  donc ne pourrait pas converger).

Donc  $H \subset \mathbb{U}$ .

C'est là la grosse difficulté !

Tous les éléments de  $H$  sont de la forme  $e^{i\theta}$ . Soit  $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{U} \\ \theta \mapsto e^{i\theta} \end{cases}$   $\varphi$  est clairement un

morphisme surjectif. Alors  $A = \varphi^{-1}(H)$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ , donc, soit de la forme  $a\mathbb{Z}$ , soit dense :

(a) si  $A$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , alors

- ou bien  $A = \mathbb{R}$ , donc  $H = \varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{U}$ .
- ou bien  $A \neq \mathbb{R}$ . Alors on dispose de  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $x \notin A$ . Donc  $\varphi(x) \notin H$ . Mais on dispose de  $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$  tel que  $u_n \rightarrow x$ . Donc, par continuité de l'exponentielle complexe,  $\varphi(u_n) \rightarrow \varphi(x) \notin \mathbb{U}$ , alors que pour tout  $n$ ,  $\varphi(u_n) \in H$ . Donc  $H$  n'est pas compact !

(b) sinon,  $A = a\mathbb{Z}$  avec  $a \in \mathbb{R}$ .

- si  $\frac{a}{2\pi} \in \mathbb{Q}$ , alors écrivons  $a = 2\pi \frac{p}{q}$ . Alors pour tout  $x$  dans  $A$ ,  $qx \in 2\pi\mathbb{Z}$  donc  $\varphi(qx) = 1$ , i.e.  $\varphi(x)^q = 1$ , i.e.  $H \subset \mathbb{U}_q$ . Donc  $H$  est un sous-groupe fini de  $\mathbb{C}$  et on est ramenés à la question précédente !
- sinon,  $\frac{a}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$ , donc si l'on regarde le sous-groupe  $a\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ , c'est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$  qui ne peut pas s'écrire comme un  $b\mathbb{Z}$  (sinon on aurait  $m$  tel que  $a = bm$  et  $n$  tel que  $2\pi = bn$ , i.e.  $\frac{a}{2\pi} \in \mathbb{Q}$ , absurde). Donc ce sous-groupe est dense ! Soit alors  $y \notin H$ , et  $x$  un antécédent de  $y$  par  $\varphi$ . Par densité de  $a\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ , on dispose de  $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$  et  $(v_n) \in 2\pi\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  tels que  $u_n + v_n \rightarrow x$ . Donc  $\varphi(u_n + v_n) \rightarrow y$ , mais  $\varphi(u_n + v_n) = e^{iu_n}e^{iv_n} = e^{iu_n}$  car  $v_n \in 2\pi\mathbb{Z}$ . Donc  $\varphi(u_n) \in H$  pour tout  $n$  et  $\varphi(u_n) \rightarrow y \notin H$ , i.e.  $H$  n'est pas compact !

Finalement, les seuls sous-groupes compacts de  $\mathbb{C}$  sont  $\mathbb{U}$  et les  $\mathbb{U}_n$  avec  $n \in \mathbb{N}$ .

### 3 Morphismes, parties génératrices

Exercice 17. Morphismes sur  $\mathbb{Z}$ , sur  $\mathbb{Q}$ . ●●○

1. Déterminer tous les morphismes de groupes de  $(\mathbb{Z}, +)$  dans  $(\mathbb{Z}, +)$ . Préciser, à chaque fois, le noyau et l'image de ce morphisme.

**Correction**

On sait que  $\mathbb{Z}$  est engendré par 1 :  $\forall n \in \mathbb{Z}, n = n \cdot 1$ . Si  $\varphi$  est un morphisme de groupes de  $(\mathbb{Z}, +)$  dans  $(\mathbb{Z}, +)$ , on en déduit alors que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{Z}$ ,  $\varphi(n) = n\varphi(1)$ . Donc :

- si  $\varphi(1) = 0$ , alors  $\ker(\varphi) = \mathbb{Z}$  et  $\text{Im}(\varphi) = \{0\}$ ,
- sinon,  $\varphi$  est injectif et  $\text{Im}(\varphi) = \varphi(1)\mathbb{Z}$ .

2. Quels sont les automorphismes de groupe de  $(\mathbb{Z}, +)$  ?

**Correction**

Les automorphismes de  $(\mathbb{Z}, +)$  sont les morphismes bijectifs de  $(\mathbb{Z}, +)$ . Étant donnée l'image d'un morphisme de  $(\mathbb{Z}, +)$ , les seuls automorphismes sont  $\pm \text{Id}_{\mathbb{Z}}$ .

3. Trouver tous les morphismes de groupes de  $(\mathbb{Q}, +)$  dans  $(\mathbb{Z}, +)$ .

**Correction**

Il n'y en a pas beaucoup... Le morphisme nul fonctionne, montrons que c'est le seul. Supposons par l'absurde qu'il existe  $\varphi$  un morphisme non nul de  $(\mathbb{Q}, +)$  dans  $(\mathbb{Z}, +)$ . Notons  $a = \varphi(1)$ . Sans perte de généralité, on peut supposer  $a > 0$ .

Posons  $x = \frac{1}{a+1}$ . Alors  $\varphi(x) \in \mathbb{Z}$  et  $\varphi(1) = \varphi((a+1)x) = (a+1)\varphi(x)$ .

Mais  $\varphi(x) \in \mathbb{Z}$  et, comme  $\varphi(1) > 0$ ,  $\varphi(x) > 0$ . Donc  $\varphi(x) \geq 1$ , donc

$$\varphi(1) = (a+1)\varphi(x) \geq a+1,$$

absurde car  $\varphi(1) = a$ . Donc  $\varphi(1) = 0$  et  $\varphi$  est le morphisme nul.

**Exercice 18.** ●●● Un **isomorphisme** de groupes est un morphisme de groupes bijectif. Deux groupes sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme de l'un vers l'autre. Démontrer que  $(\mathbb{Q}, +)$  et  $(\mathbb{Q}^*, \times)$  ne sont pas isomorphes.

**Correction**

Supposons que  $(\mathbb{Q}, +)$  et  $(\mathbb{Q}^*, \times)$  soient isomorphes, soit  $\varphi : (\mathbb{Q}, +) \rightarrow (\mathbb{Q}^*, \times)$  un isomorphisme. Soit  $x$  un antécédent de 2 par  $\varphi$ . Notons  $y = \frac{x}{2}$ . Alors  $\varphi(2y) = \varphi(y)^2$ , donc  $\varphi(x) = \varphi(y)^2$ , i.e.  $2 = \varphi(y)^2$ , avec  $\varphi(y) \in \mathbb{Q}$ . Donc  $\varphi(y) = \pm\sqrt{2}$ , donc  $\pm\sqrt{2}$  serait rationnel, absurde!

Donc  $(\mathbb{Q}, +)$  et  $(\mathbb{Q}^*, \times)$  ne sont pas isomorphes.

**Exercice 19.** Nombre de morphismes d'un groupe. ●●● Soit  $(G, \cdot)$  un groupe fini à  $n$  éléments.

1. Soit  $H$  une partie génératrice de  $G$  à  $p$  éléments. Montrer qu'il y a au plus  $n^p$  morphismes de  $G$ .

**Correction**

Écrivons  $H = \{h_1, \dots, h_p\}$ . Alors pour tout  $x$  de  $G$ , on dispose de  $s \in \mathbb{N}$ ,  $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in H^s$ ,  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s) \in \{-1, 1\}^s$  tels que

$$x = \alpha_1^{\varepsilon_1} \cdots \alpha_s^{\varepsilon_s}.$$

Si  $\varphi$  est un morphisme de  $G$ , alors

$$\varphi(x) = \varphi(\alpha_1)^{\varepsilon_1} \cdots \varphi(\alpha_s)^{\varepsilon_s}.$$

Donc  $\varphi$  est **entièrement déterminé par ses images des éléments de  $H$** .

Or, pour chaque élément de  $H$ , il y a au plus  $n$  images possibles. Comme il y a  $p$  éléments dans  $H$ , il y a au plus  $n^p$  choix d'automorphismes possibles.

2. Démontrer que  $G$  admet une partie génératrice qui possède moins de  $\lceil \log_2(n) \rceil$  éléments, où  $\lceil \cdot \rceil$  désigne la partie entière supérieure.

**Correction**

Soit  $x_1$  dans  $G$  tel que  $x_1 \neq e$  (où  $e$  est le neutre de  $G$ ). Considérons  $H_1 = \langle x_1 \rangle$ . Alors  $H_1$  a au moins 2 éléments.

Si  $H_1 \neq G$ , soit  $x_2 \notin H_1$ . Alors si l'on définit  $x_2 H_1 = \{x_2 y, y \in H_1\}$ , on montre facilement que  $x_2 H_1 \cap H_1 = \emptyset$  (sinon on disposerait de  $y$  et  $y'$  dans  $H_1$  tels que  $y = x_2 y'$  donc  $x_2 = y \cdot y'^{-1}$  serait dans  $H_1$ ). Donc, comme  $\langle x_1, x_2 \rangle$  contient  $H_1$  et  $x_2 H_1$ , donc il possède au moins 4 éléments.

On poursuit ainsi, en prenant  $x_3 \notin \langle x_1, x_2 \rangle$ , etc. jusqu'à arriver à  $p$  tel que  $H_p = \langle x_1, \dots, x_p \rangle$  soit égal à  $G$ . Alors  $H_p = G$  et  $H_p$  possède au moins  $2^p$  éléments.

Or, le plus petit  $q$  tel que  $n \leq 2^q$ , vérifie

$$q_0 - 1 < \log_2(n) \leq q_0,$$

i.e.  $q_0 = \lceil \log_2(n) \rceil$ . Mais comme  $H_p$  possède **au moins**  $2^p$  éléments, cela signifie que  $p \leq q_0$ , i.e.  $p \leq \lceil \log_2(n) \rceil$ .

3. En déduire que  $G$  possède au plus  $n^{\lceil \log_2(n) \rceil}$  morphismes.

**Correction**

On a vu en question précédente que  $G$  possédait une partie génératrice d'au plus  $\lceil \log_2(n) \rceil$  éléments. Donc, par la première question, il admet au plus

$$n^{\lceil \log_2(n) \rceil} \text{ morphismes,}$$

ce qui était exactement le résultat à démontrer !

**Exercice 20.** ●●● Soit  $G$  un groupe abélien de cardinal supérieur ou égal à 2. Un élément  $\mu$  de  $G$  est dit *mou* si pour toute partie  $H$  génératrice de  $G$ ,  $H \setminus \{\mu\}$  est génératrice de  $G$ . On note  $M$  l'ensemble des éléments mous de  $G$ .

1. Démontrer que  $M$  est un sous-groupe de  $G$ . On l'appelle sous-groupe de Frattini de  $G$ .

**Correction**

**Notons \* la loi de  $G$  et  $e$  son neutre.** Déjà  $e$  est dans  $M$ . En effet, si  $H$  est une partie génératrice de  $G$ , alors  $H$  n'est pas réduite au neutre (sinon elle ne pourrait pas engendrer tout  $G$ ). Donc on dispose de  $x \in H$  tel que  $x \neq e$ . Donc  $\langle H \setminus \{e\} \rangle$  contient  $x$ , donc contient  $x * x^{-1} = e$ . Donc  $\langle H \setminus \{e\} \rangle$  contient  $H$ , donc  $e$  est mou.

Ensuite, soient  $x$  et  $y$  dans  $M$ .

Soit  $H$  génératrice de  $G$ , et posons  $K = H \setminus \{x * y^{-1}\}$ . Alors, comme  $\langle K, x * y^{-1} \rangle = \langle H \rangle = G$ ,  $\langle K, x * y^{-1} \rangle = \langle K, x * y^{-1}, x, y \rangle$ . Mais  $x * y^{-1}$  est engendré par  $x$  et  $y$ , donc

$$\langle K, x * y^{-1} \rangle = \langle K, x * y^{-1}, x, y \rangle = \langle K, x, y \rangle = \langle K, x \rangle = \langle K \rangle,$$

les deux dernières égalités venant du fait que  $y$ , puis  $x$  sont mous.

2. Dans cette question,  $G = (\mathbb{Z}, +)$ . Montrer que l'ensemble des éléments mous de  $G$  est  $\{0\}$ .

**Correction**

On montre que seul 0 est mou dans  $\mathbb{Z}$ . Soit en effet  $n$  dans  $\mathbb{Z}^*$ . Alors on remarque très facilement que  $\langle n, n+1 \rangle = \mathbb{Z}$ , pour la simple et bonne raison que  $n+1 - n = 1$ , donc  $\langle n, n+1 \rangle$  contient 1, donc contient le sous-groupe engendré par 1, c'est-à-dire  $\mathbb{Z}$ .

3. Dans cette question,  $G = (\mathbb{Q}, +)$ . On va montrer que tout rationnel est mou. Soit  $r = \frac{p}{q}$  dans  $\mathbb{Q}$  et  $H$  une partie génératrice de  $\mathbb{Q}$ ,  $K = H \setminus \{r\}$ .
- (a) Si  $r \notin H$ , conclure immédiatement que  $K$  est génératrice.

**Correction**

C'est évident car  $K = H$ .

On suppose alors que  $r \in H$ .

- (b) Démontrer que  $H \setminus \{r\}$  n'est pas vide.

**Correction**

Sinon toute fraction serait multiple de  $\frac{p}{q}$ , absurde !

- (c) Posons  $K$  le sous-groupe engendré par  $H \setminus \{r\}$ . Soit  $A = qK = \{qx, x \in K\}$
- i. Démontrer qu'il existe  $d \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A \cap \mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ .

**Correction**

Déjà  $A$  est un sous-groupe de  $\mathbb{Q}$  et  $A \cap \mathbb{Z}$  est un sous-groupe de  $\mathbb{Q}$  contenu dans  $\mathbb{Z}$ , donc c'est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}$ . Donc on dispose de  $d$  dans  $\mathbb{N}^*$  tel que  $A \cap \mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ .

- ii. Démontrer qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$ ,  $u \in \mathbb{Z}$ ,  $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}^k$ ,  $(r_1, \dots, r_k) \in (H \setminus \{r\})^k$  tels que

$$\frac{1}{qd} = ur + n_1r_1 + \dots + n_kr_k,$$

puis démontrer que

$$1 - qdur \in d\mathbb{Z}.$$

#### Correction

La première égalité vient du fait que  $H$  est génératrice de  $\mathbb{Q}$ . Puis la seconde vient du fait que  $qdur = dup \in \mathbb{Z}$  donc  $1 - qdur \in \mathbb{Z}$ . Mais on a aussi

$$1 - qdur = qd(n_1r_1 + \dots + n_kr_k) \in A,$$

donc  $1 - qdur \in A \cap \mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ .

- iii. Démontrer que  $d = 1$  et conclure.

#### Correction

On en déduit que  $d$  divise  $1 - qdur$  donc  $d$  divise 1. Donc  $d = 1$ . Donc  $A$  contient tous les éléments de  $\mathbb{Z}$  donc 1, donc on dispose de  $s \in H \setminus \{r\}$  tel que  $qs = 1$  donc  $s = \frac{1}{q}$ . Donc  $r = ps \in \langle K \rangle$ , donc  $\langle K \rangle = \langle K \cup \{x\} \rangle$  donc  $\langle K \rangle = \langle H \rangle$  donc  $x$  est mou.

## 4 Groupe symétrique

**Exercice 21.** ●●○ Soit  $E$  un ensemble contenant au moins trois éléments. Montrer que  $S_E$  n'est pas commutatif.

#### Correction

Nommons  $x$ ,  $y$  et  $z$  trois éléments distincts de  $E$ . Soit  $\varphi$  l'application qui échange  $x$  et  $y$  et laisse fixes tous les autres éléments. Soit  $\psi$  l'application qui échange  $x$  et  $z$  et laisse fixes tous les autres éléments. Alors

$$\varphi \circ \psi(x) = \varphi(z) = z,$$

et

$$\psi \circ \varphi(x) = \psi(y) = y.$$

Donc  $\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$ , donc  $S_E$  n'est pas commutatif.

**Exercice 22.** ●●●○

- Démontrer que le centre (défini comme en 11) de  $S_n$  est trivial (i.e. égal à  $\{\text{Id}\}$ ) pour  $n \geq 3$ .  
On pourra utiliser l'exercice 4

**Correction**

Soit  $\sigma$  tel que  $\forall s \in S_n, \sigma \circ s \circ \sigma^{-1} = s$ . Alors pour tous  $a$  et  $b$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $(\sigma(a) \sigma(b)) = (a, b)$ . Donc si  $n = 2$ ,  $S_n$  est commutatif, si  $n \geq 3$ , soient  $a, b, c$  trois entiers distincts. Alors  $(\sigma(a) \sigma(b)) = (a, b)$ , i.e.  $\sigma(a) = a$  ou  $b$ , et  $(\sigma(a) \sigma(c)) = (a, c)$  donc  $\sigma(a) = a$  ou  $c$ , donc  $\sigma(a) = a$ , et ce pour tout  $a$ , donc  $\sigma = \text{Id}$ .

2. ●●● Démontrer que le centre de  $\mathcal{A}_n$  est trivial pour  $n \geq 4$ .

**Correction**

Soit  $n \geq 4$ , et  $\sigma$  dans le centre de  $\mathcal{A}_n$ . Soient  $a, b, c, d$  quatre entiers distincts. Alors  $\sigma \circ (a b c) \circ \sigma^{-1} = (a b c)$ , et, par le même raisonnement que précédemment,  $\sigma \circ (a b c) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a) \sigma(b) \sigma(c))$  donc

$$\{\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c)\} = \{a, b, c\}.$$

De même,

$$\{\sigma(a), \sigma(b), \sigma(d)\} = \{a, b, d\},$$

et

$$\{\sigma(a), \sigma(c), \sigma(d)\} = \{a, c, d\},$$

donc, en intersectant les trois ensembles,  $\sigma(a) = a$ . On montre ainsi que pour tout entier  $x$ ,  $\sigma(x) = x$  donc  $\sigma = \text{Id}$ .

Remarque : si  $n = 3$ , on remarque que  $\mathcal{A}_3 = \{\text{Id}, \rho, \rho^2\}$  avec  $\rho = (1 2 3)$ , donc  $\mathcal{A}_3$  est cyclique, donc abélien, donc est son propre centre.

**Exercice 23.** ●●● Vous venez d'obtenir ce jeu de taquin dans votre paquet de céréales. Où est l'arnaque ?

4	1	3
5	2	7
8	6	

**Correction**

À toute position du taquin on associe une permutation de  $\llbracket 1, 8 \rrbracket$ , en identifiant des

positions comme 

4	1	3
5	2	7
8	6	

 et 

4	1	3
5	2	7
8		6

 (qui correspondent à la permutation

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$  dans notre cas). Le déplacement d'un carré correspond soit à la permutation  $\text{Id}$  dans le cas d'un déplacement horizontal, soit à un 3-cycle lors d'un déplacement vertical. Dans tous les cas, le déplacement d'un carré ne change pas la signature. Or, la signature de  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$  est  $-1$  car la permutation s'écrit  $(1452) \circ (678)$ ,

donc on ne pourra jamais retrouver la position 

1	2	3
4	5	6
7	8	

, de signature 1.

**Exercice 24. ●●●** Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ . On appelle dérangement de  $E$  toute permutation de  $E$  sans point fixe. On note  $d_p$  le nombre de dérangements d'un ensemble à  $p$  éléments.

1. Montrer que  $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k$ .

**Correction**

Soit  $S_{n,k}$  l'ensemble des permutations ayant  $n - k$  points fixes. Choisir une permutation avec  $k$  points fixes, c'est choisir d'abord  $n - k$  points fixes, i.e.  $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$  possibilités, puis choisir une permutation sans point fixe sur les points restants, i.e.  $d_k$  possibilités.

Donc  $|S_{n,k}| = \binom{n}{k} d_k$ , donc, comme  $S_n$  est la réunion disjointe de tous les  $S_{n,k}$ , on a

$$|S_n| = \sum_{k=0}^n |S_{n,k}|, \text{ donc } n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k.$$

2. Démontrer la formule d'inversion de Pascal : soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{N}$ , soit  $g$  définie pour tout  $n$  par  $g(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(k)$ . Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $f(n) =$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} g(k).$$

**Correction**

Calculons  $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} g(k)$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} g(k) &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} f(j) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{j} f(j) \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{j} f(j). \end{aligned}$$

Or,  $\binom{n}{k} \binom{k}{j} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!}{j!(k-j)!} = \frac{n!}{(n-k)!j!(k-j)!} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-k}$ , d'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} g(k) &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-k} f(j) \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f(j) \sum_{k=j}^n (-1)^{n-k} \binom{n-j}{n-k} \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f(j) \sum_{\ell=0}^{n-j} (-1)^{n-k} \binom{n-j}{\ell} \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f(j) (1-1)^{n-j} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f(j) \delta_{nj} = \binom{n}{n} f(n) = f(n), \end{aligned}$$

d'où le résultat demandé.

3. En déduire une formule pour  $d_n$ .

**Correction**

On en déduit, par la formule d'inversion, que

$$d_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} n! \sum_{\ell=0}^{n-k} \frac{(-1)^\ell}{\ell!}.$$

4. Quelle est la limite de la proportion  $\frac{d_n}{n!}$  des dérangements de  $E$  parmi les permutations de  $E$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

**Correction**

La proportion de dérangements est alors  $\frac{d_n}{n!}$ , i.e.  $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ , elle converge donc vers  $\frac{1}{e}$ .

## 5 Anneaux et corps

**Exercice 25.** Anneau des dyadiques. ●●○ On définit le sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{Q}$  par

$$A = \left\{ \frac{p}{2^n}, p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

1. Montrer que  $A$  est un sous-anneau de  $\mathbb{Q}$ . Est-il intègre ? Tout élément de  $A$  est-il inversible pour  $\times$  ?

### Correction

Montrons que  $A$  est un sous-anneau de  $\mathbb{Q}$ .

- $A$  est un sous-groupe de  $\mathbb{Q}$ 
  - $A \neq \emptyset$  car  $0 \in A$ .
  - Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $A$ . Alors on dispose de  $p$  et  $q$  dans  $\mathbb{Z}$ , de  $n$  et  $m$  dans  $\mathbb{N}$  tels que  $x = \frac{p}{2^n}$  et  $y = \frac{q}{2^m}$ . Alors

$$x - y = \frac{2^m x - 2^n y}{2^{n+m}} \in A.$$

- $A$  est stable par multiplication. Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $A$ . Alors on dispose de  $p$  et  $q$  dans  $\mathbb{Z}$ , de  $n$  et  $m$  dans  $\mathbb{N}$  tels que  $x = \frac{p}{2^n}$  et  $y = \frac{q}{2^m}$ . Alors

$$xy = \frac{pq}{2^{m+n}} \in A.$$

Donc  $A$  est un sous-anneau de  $\mathbb{Q}$ . Il est intègre car  $\mathbb{Q}$  est intègre. Cependant il n'est pas inversible pour  $\times$  :  $3 \in A$  mais son inverse dans  $\mathbb{Q}$  est  $\frac{1}{3}$  qui ne peut pas s'écrire comme  $\frac{q}{2^n}$  (si c'était le cas, on aurait  $2^n = 3q$ , i.e.  $v_3(2^n) \geq 1$ , absurde).

2. Déterminer  $U(A)$ .

### Correction

Soit  $x = \frac{p}{2^n}$  un élément inversible de  $A$ . Alors on dispose de  $q$  et  $m$  tels que  $x \times \frac{q}{2^m} = 1$ . Sans perte de généralité, on peut supposer  $p \wedge 2^n = 1$  et  $q \wedge 2^m = 1$ . Alors

$$pq = 2^n 2^m.$$

Donc  $p$  et  $q$  sont des puissances de 2. Comme  $p \wedge 2^n = 1$ , on a

- soit  $p = 1$  et  $n = 0$
- soit  $p = 1$  et  $n \geq 1$ , et alors  $q = 2^n$  et  $m = 0$ .
- soit  $p = 2^k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) et  $n = 0$ , et alors  $q = 1$  et  $m = k$ .

Finalement, l'ensemble des unités de  $A$  est l'ensemble des puissances de 2 (positives ou négatives).

**Exercice 26. Anneaux de Boole.** ●●○ On appelle anneau de Boole tout anneau  $(A, +, \times)$  tel que  $\forall a \in A, a^2 = a$ .

1. Montrer que  $\forall a \in A, a + a = 0_A$ .

**Correction**

On calcule  $(a+a)^2$  de deux manières différentes. Déjà  $(a+a)^2 = a+a$  (propriété d'anneau de Boole). Ensuite,  $(a+a)^2 = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 = a+a+a+a$ , donc  $a+a = a+a+a+a$ , i.e.  $a+a = 0$ .

2. En déduire que  $A$  est commutatif pour la loi  $\times$ .

**Correction**

Soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $A$ . On sait que  $(a+b)^2 = a+b$ , et  $(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a + ab + ba + b = a + b + ab + ba$ , donc  $a+b = a+b+ab+ba$ , donc  $ab+ba = 0$ , donc  $ab = -ba = (-b)a = ba$  par la question précédente. Donc  $A$  est commutatif pour  $\times$ .

3. Montrer que si  $A$  est fini, son cardinal est nécessairement différent de 3.

**Correction**

Supposons  $A$  de cardinal 3. Alors  $A = (0_A, 1_A, x)$ , avec  $x \neq 0_A$  et  $x \neq 1_A$ . Intéressons-nous à  $x + 1_A$ . On a

- soit  $x + 1_A = 0_A$ , i.e.  $x = -1_A = 1_A$ , impossible.
- soit  $x + 1_A = 1_A$ , i.e.  $x = 0_A$ , impossible.
- soit  $x + 1_A = x$ , i.e.  $1_A = 0_A$ , impossible.

Donc  $A$  ne peut être de cardinal 3.

4. Montrer que si  $\text{Card}(A) > 2$ , alors  $A$  n'est pas intègre.

**Correction**

si  $\text{Card}(A) > 2$ , on dispose de  $x$  dans  $A$  qui soit différent de  $0_A$  et de  $1_A$ . Alors  $x^2 = x$ , i.e.  $x^2 - x = 0_A$ , i.e.  $x \times (x - 1_A) = 0_A$ , avec  $x \neq 0_A$  et  $x \neq 1_A$ , donc  $x - 1_A \neq 0$ . Donc  $A$  n'est pas intègre.

5. On définit une relation binaire sur  $A$  par  $x \preceq y$  si, et seulement si  $yx = x$ . Montrer que  $\preceq$  est une relation d'ordre sur  $A$ .

**Correction**

Vérifions les trois hypothèses des relations d'ordre.

- $\preceq$  est réflexive.  
Soit  $x \in A$ . Alors par définition  $x \times x = x$ , donc  $x \preceq x$ .

- $\preceq$  est antisymétrique.  
Soient  $x$  et  $y$  tels que  $x \preceq y$  et  $y \preceq x$ . Alors  $yx = x$  et  $xy = y$ . Or  $\times$  est commutative donc  $yx = xy$ , donc  $x = y$ .
  - $\preceq$  est transitive.  
Soient  $x, y$  et  $z$  trois éléments de  $A$  tels que  $x \preceq y$  et  $y \preceq z$ . Alors  $yx = x$  et  $zy = y$ . Donc  $zx = zyx = yx = x$ . Donc  $x \preceq z$ .
- Donc  $\preceq$  est une relation d'ordre sur  $A$ .

- Exercice 27.** 1. ●●○ Déterminer tous les morphismes de corps de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{Q}$  (indication : il n'y en a pas beaucoup... !)
2. ●●○ Soit  $f$  un morphisme de corps de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Démontrer que  $f$  est égale à l'identité sur les rationnels, puis que  $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$ , puis que  $f$  est croissante, et enfin que  $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ .

**Exercice 28.** ●●○ Soit  $\phi$  une racine de l'équation

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Montrer que  $\mathbb{Q}[\phi] = \{q + \phi r, (q, r) \in \mathbb{Q}^2\}$  est un corps.

**Correction**

Montrons qu'il s'agit d'un sous-anneau de  $\mathbb{R}$ , et que chaque élément non nul admet un inverse.

- $\mathbb{Q}[\phi] \neq \emptyset$  car  $0 \in \mathbb{Q}[\phi]$ .
- Si  $x$  et  $y$  sont dans  $\mathbb{Q}[\phi]$ , on dispose de  $q, r, q', r'$  quatre rationnels tels que  $x = q + \phi r$  et  $y = q' + \phi r'$ .

— Montrons que  $x - y \in \mathbb{Q}[\phi]$ .

$$x - y = q + \phi r - (q' + \phi r') = (q - q') + \phi(r - r') \in \mathbb{Q}[\phi].$$

— Montrons que  $xy \in \mathbb{Q}[\phi]$ .

$$\begin{aligned} xy &= (q + \phi r)(q' + \phi r') \\ &= qq' + \phi r q' + \phi r' q + \phi^2 r r' \end{aligned}$$

Or,  $\phi^2 = \phi + 1$ , donc

$$xy = (qq' + rr') + \alpha(rq' + r'q + 1).$$

Or,  $qq' + rr' \in \mathbb{Q}$  et  $rq' + r'q + 1 \in \mathbb{Q}$ , donc  $xy \in \mathbb{Q}[\alpha]$ .

- Soit enfin  $x$  non nul dans  $\mathbb{Q}[\phi]$ . Son inverse dans  $\mathbb{R}$  est  $\frac{1}{x}$ . Montrons que  $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}[\phi]$ . On dispose de  $q$  et  $r$  rationnels tels que  $x = q + r\alpha$ . Alors

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{q + r\phi}$$

Écrivons  $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  (le cas  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  est similaire). Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{2}{2q + r + r\sqrt{5}} \\ &= \frac{2}{(2q + r) + \sqrt{5}r} \\ &= \frac{2((2q + r) - \sqrt{5}r)}{(2q + r)^2 - 5r^2} \\ &= \frac{2((2q + r) + r - r - \sqrt{5}r)}{(2q + r)^2 - 5r^2} \\ &= 4 \frac{q + r}{(2q + r)^2 - 5r^2} + \phi \frac{-4r}{(2q + r)^2 - 5r^2} \in \mathbb{Q}[\phi]. \end{aligned}$$

Donc  $\mathbb{Q}[\phi]$  est un corps.

**Exercice 29.** Anneau  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ . ●●○ - ●●●  
 On définit  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + \sqrt{2}b, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ .

1. Montrer que  $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$  est un anneau commutatif et intègre.

**Correction**

On l'a montré avec  $\mathbb{Q}[\alpha]$  (il s'agit du même type de raisonnement) ! La commutativité et l'intégrité viennent de la commutativité et de l'intégrité de  $\mathbb{R}$ .

2. Soit  $x = a + \sqrt{2}b$  un élément de  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ .

(a) Montrer que le couple  $(a, b)$  est unique.

**Correction**

Supposons que  $a + \sqrt{2}b = a' + \sqrt{2}b'$ . Alors  $a - a' = \sqrt{2}(b - b')$  et  $a - a' \in \mathbb{Z}$ , donc nécessairement  $b - b' = 0$ . Donc  $b = b'$  et il vient  $a = a'$ . D'où l'unicité.

(b) On pose alors  $N(x) = a^2 - 2b^2$ . Montrer que pour tous  $x, y$  de  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ,

$$N(xy) = N(x)N(y).$$

**Correction**

Soient  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ . On dispose de  $a, b, \alpha, \beta$  entiers tels que  $x = a + \sqrt{2}b$  et  $y = \alpha + \sqrt{2}\beta$ . Donc

$$xy = (a\alpha + 2b\beta) + \sqrt{2}(a\beta + b\alpha).$$

Donc

$$\begin{aligned}
 N(xy) &= (a\alpha + 2b\beta)^2 - 2(a\beta + b\alpha)^2 \\
 &= a^2\alpha^2 + 4ab\alpha\beta + 4b^2\beta^2 - 2a^2\beta^2 - 4ab\alpha\beta - 2b\alpha^2 \\
 &= a^2\alpha^2 - 2a^2\beta^2 - 2b^2\alpha^2 + 4b^2\beta^2 \\
 &= (a^2 - 2b^2)(\alpha^2 - 2\beta^2) \\
 &= N(x)N(y).
 \end{aligned}$$

3. On veut déterminer  $U(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$ .

(a) Montrer que  $x \in U(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$  si, et seulement si  $N(x) = 1$  ou  $N(x) = -1$ .

**Correction**

Si  $x \in U(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$ , alors on dispose de  $y \in U(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$  tel que  $xy = 1$ . Donc  $N(xy) = 1$ , i.e.  $N(x)N(y) = 1$ , i.e., comme  $N$  est toujours entier,  $N(x) = 1$  ou  $N(x) = -1$ . Réciproquement, si  $N(x) = 1$ , posons  $y = a - \sqrt{2}b$ . Alors  $xy = N(x) = 1$ . Si  $N(x) = -1$ , on pose  $y = \sqrt{2}b - a$  et on a le résultat.

(b) Montrer que pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{Z}$ ,  $(1 + \sqrt{2})^n$  appartient à  $U(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$ .

**Correction**

On montre par récurrence évidente que  $N(x^n) = N(x)^n$ . Donc  $N((1 + \sqrt{2})^n) = N(1 + \sqrt{2})^n = (1 - 2)^n = (-1)^n$ . D'où le résultat.

4. ●●● Montrer que réciproquement, les inversibles de  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  sont de la forme  $\pm(1 + \sqrt{2})^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Correction**

Supposons que l'on ait un élément inversible de la forme  $a + \sqrt{2}b$  avec  $a, b$  positifs (c'est possible, quitte à multiplier par  $-1$  et/ou par le conjugué, et tel que  $\min(a, b)$  soit minimal, mais tel que  $(a, b) \neq (1, 1)$ .

Alors  $\frac{a + \sqrt{2}b}{1 + \sqrt{2}} = -(a - 2b) - \sqrt{2}(b - a)$ . Alors

- si  $a \leq b$ ,  $\min |a - 2b|, |b - a| = b - a$ , et, quitte à diviser à nouveau par  $1 + \sqrt{2}$ , on obtient une valeur minimale égale au reste dans la division euclidienne de  $b$  par  $a$ , absurde !
- on continue ainsi la disjonction de cas en obtenant à chaque fois une contradiction !

**Exercice 30.** ●●● Soit  $E$  un ensemble. Montrer que  $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$  est un anneau commutatif.

**Correction**

Déjà,  $\Delta$  et  $\cap$  sont sans difficultés des lois de composition internes. Rappelons que si  $A$  et  $B$

sont deux ensembles,

$$\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B \text{ et } \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B.$$

1.  $(\mathcal{P}(E), \Delta)$  est un groupe abélien.

- $\Delta$  est associative. Soient  $A, B$  et  $C$ . Montrons que  $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$  en utilisant les fonctions indicatrices :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C} &= \mathbb{1}_{A\Delta B} + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_{A\Delta B}\mathbb{1}_C \\ &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_C \\ &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C + 4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)} &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{B\Delta C} - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{B\Delta C} \\ &= \mathbb{1}_A + (\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C) - 2\mathbb{1}_A(\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C) \\ &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C + 4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C, \end{aligned}$$

d'où l'égalité désirée.

- $\Delta$  admet un élément neutre, c'est l'ensemble vide. En effet, si  $A \in \mathcal{P}(E)$ ,

$$\mathbb{1}_{A\Delta\emptyset} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_\emptyset - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_\emptyset = \mathbb{1}_A + 0 - 2 \cdot 0 = \mathbb{1}_A.$$

De même,  $\mathbb{1}_{\emptyset\Delta A} = \mathbb{1}_A$ .

- Tout élément de  $\mathcal{P}(E)$  admet lui-même comme inverse pour  $\Delta$ . En effet, si  $A \in \mathcal{P}(E)$ ,

$$\mathbb{1}_{A\Delta A} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_A - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_A = 2\mathbb{1}_A - 2\mathbb{1}_A = 0 = \mathbb{1}_\emptyset.$$

- Enfin,  $\Delta$  est commutative par commutativité de l'addition et de la multiplication.

2.  $\cap$  est associative

3.  $\cap$  possède un élément neutre : il s'agit de  $E$  !

4.  $\cap$  est distributive sur  $\Delta$ .

Je vous laisse vérifier de la même manière les autres propriétés, il s'agit d'un bon exercice de révision sur les fonctions indicatrices.

Remarque : cet anneau est un anneau de Boole !

### Indications

1. Exercice dur (notamment pour un premier exo de TD). Un conseil : utilisez la définition epsilonlesque de la borne inf.

1. Évident.

2. À  $\varepsilon$  fixé, trouver  $h$  dans  $H$  tel que  $0 < h < \varepsilon$  et, pour  $x$  dans  $\mathbb{R}$ , faire des « sauts » de taille  $h$  pour atteindre  $x$  !

3. Une inclusion est évidente, l'autre beaucoup moins : pour l'autre, supposer que l'on a  $h$  dans  $H$  qui ne soit pas dans  $a\mathbb{Z}$ . Prendre  $\varepsilon =$  la distance de  $h$  à  $a\mathbb{Z}$  et voir ce que l'on peut en dire !

2. Indication : les deux premières conditions sont les mêmes. Attention à la manipulation des quantificateurs notamment !
3. Appliquer la méthode du cours !
4. PRENDRE UN EXEMPLE ! Prendre par exemple  $n = 5$ ,  $(a\ b) = (1\ 2)$  et  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ .
5. Revenir aux définitions.
6.
  1. Penser à une matrice triangulaire.
  2. Supposer que c'est le cas.
  3. Utiliser les règles de calcul dans un anneau, et prendre une puissance suffisamment grande.
  4. Remarquer que  $1_A = 1_A - 0_A = 1_A - x^n$  si  $n$  est tel que  $x^n = 0$ .
7. La difficulté est de montrer que l'inverse d'un élément de  $\mathbb{Q}[\alpha]$  est dans  $\mathbb{Q}[\alpha]$  : utiliser pour cela la quantité conjuguée.
8.
  1. Revenir aux définitions, et utiliser que  $(\sqrt[3]{x})^3 = x$ .
  2. Utiliser un contre-exemple (pas d'inverse par exemple, ou pas de neutre).
9. Les similitudes dégénérées sont les  $z \mapsto az + b$  pour lesquelles  $a = 0$ .
10. Attention, remarquer que si l'on prend deux éléments dans cet ensemble, les  $n$  correspondants ne seront pas les mêmes !
11. Revenir aux définitions.
12. **ATTENTION!**  $AB = BA$  **ne signifie pas** que les éléments de  $A$  et ceux de  $B$  commutent. Raisonner par double implication. Pour l'implication directe, **partir de  $a$  dans  $A$  et  $b$  dans  $B$  et montrer que  $ab \in BA$** . Pour l'implication réciproque, essayer de dérouler la définition d'un sous-groupe, et, à un moment, lorsque vous trouvez  $a * b$ , écrivez-le comme  $a' * b'$ .
13.
  1. Remarquer que pour tout  $x$ ,  $x = x^{-1}$ . Écrire donc que  $x * y = (x * y)^{-1}$ .
  2. Faire la preuve en trois étapes. Pour le produit de deux éléments, distinguer 3 cas : les deux sont dans  $H$ , les deux sont dans  $aH$  et l'un est dans  $H$ /l'autre dans  $aH$ .
  3. Raisonner de proche en proche : on prend  $x$  et on prend  $H = \{e, x\}$  qui est un sous-groupe. Si  $H = G$ , c'est bon. Sinon, appliquer la question précédente.
14. Penser qu'une loi se définit par sa table d'opérations !
15. Ne pas oublier les trois définitions d'une relation d'équivalence.
16.
  1. Montrer que ce sont les  $\mathbb{U}_n$ . Déjà montrer, à l'aide du module, qu'ils sont dans  $\mathbb{U}$ , puis utiliser que si un sous-groupe est fini alors tout élément, à une certaine puissance, donne 1.
  2. Les réponses sont oui, non, non. Penser en particulier que « dense » implique « non compact ».
  3. Montrer que ce sont les mêmes que les groupes finis. On pourra en particulier s'intéresser au morphisme  $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{U} \\ \theta \mapsto e^{i\theta} \end{cases}$  et dire que si  $G$  est un sous-groupe compact de  $\mathbb{U}$ , alors  $\varphi^{-1}(G)$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$  et qu'il est donc discret ou dense. Démontrer que s'il est discret, de la forme  $a\mathbb{Z}$ , alors si  $a \notin 2\pi\mathbb{Q}$ , alors  $G$  est dense (dur !)
17.
  1. S'intéresser à l'image de 1 et penser que  $\mathbb{Z}$  est engendré par 1 !!

2. Cf. question précédente : si on veut atteindre tout  $\mathbb{Z}$ , que faut-il sur l'image de 1 ?
3. Si on note  $a = f(1)$ , que vaut, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(1/n)$  ?
18. S'il existe un morphisme  $\varphi$ , 2 admet un antécédent  $x$  par  $\varphi$ . Que vaut alors  $\varphi(x/2)$  ?
19.
  1. Penser au fait que si on connaît un morphisme sur une partie génératrice, alors on le connaît partout.
  2. Partir d'un élément de  $G$  non neutre,  $x_1$ , et considérer  $\langle x_1 \rangle$  qui a au moins deux éléments. Prendre ensuite  $x_2 \notin \langle x_1 \rangle \dots$  et poursuivre !
  3. Combiner les deux questions précédentes.
20.
  1. Montrer que si  $x$  et  $y$  sont mous, alors  $x \cdot y^{-1}$  est mou : pour ce faire, penser que si  $x$  est mou, alors pour toute partie génératrice  $H$  de  $G$ , il existe  $a_1, \dots, a_p$  dans  $H$  différents de  $x$  tels que  $x = a_1 \cdots a_p$ .
  2. Procéder par double inclusion, et remarquer que si  $x$  est mou et n'appartient pas à un sous-groupe maximal  $H$ , alors  $\langle H \rangle \neq \langle H \cup \{x\} \rangle$ .
  3. Dans le premier cas, c'est  $\{0\}$ . Dans le second, montrer qu'il s'agit de  $\mathbb{Q}$ .
21. Trouver deux transpositions ne commutant pas.
22.
  1. Fait en cours.
  2. Utiliser que si  $\sigma$  et  $\tau$  commutent,  $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} = \tau$ .
  3. Utiliser des double-transpositions !
23. Modéliser le problème en disant qu'une grille correspond à une permutation. Se demander quel est l'effet d'un mouvement de taquin sur la permutation.
25.
  1. La vérification se fait à l'aide du cours. Il est intègre mais tout élément n'est pas inversible.
  2. Démontrer que ce sont les puissances de 2 (positives ou négatives).
26.
  1. Calculer  $(a + a)^2$  de deux manières différentes.
  2. Calculer  $(a + b)^2$ .
  3. Supposer que l'anneau à 3 éléments :  $0_A$ ,  $1_A$  et  $x$ , et se demander ce que vaut  $1_A + c$ .
  4. Démontrer que si  $x \in A$ ,  $x$  et  $x - 1_A$  sont des diviseurs de zéro.
  5. Vérifier les 3 axiomes d'une relation d'ordre.
27.
  1. C'est une des preuves du chapitre 1 que de montrer que si  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ , alors si  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $f(r) = rf(1)$ . Mais que vaut  $f(1)$  ?
  2. Commencer comme précédemment. Ensuite, prendre  $x \geq 0$ , et remarquer que  $x = a^2$  avec  $a \in \mathbb{R} \dots$  Cela devrait montrer que  $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$ . En déduire la croissance (par propriété de morphisme) et encadrer  $x \in \mathbb{R}$  par deux suites adjacentes de rationnels.
28. Soient  $\phi$  et  $\theta$  les deux racines de l'équation. Pour la stabilité par produit, utiliser l'équation. Par quotient, utiliser la « quantité conjuguée » : penser que  $(q + \phi r)(q + \theta r)$  a une expression assez simple.
29.
  1. Simple vérification.
  - 2.
  - 3.
  4. Supposons que l'on ait un élément inversible de la forme  $a + \sqrt{2}b$  avec  $a, b$  positifs (c'est possible, quitte à multiplier par  $-1$  et/ou par le conjugué), et tel que  $\min(a, b)$  soit minimal, mais tel que  $(a, b) \neq (1, 1)$ .
30. Vérifier les axiomes d'un anneau (pas d'un sous-anneau), et ne pas hésiter à utiliser les fonctions indicatrices.