MPSI1 – Programme de colles
Semaine 08 – du 20 au 24 novembre 2023

Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral

B - Primitives et équations différentielles linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
b) Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Équation différentielle linéaire du premier ordre $$y' + a(x)y = b(x)$$ où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Ensemble des solutions de l'équation homogène. Principe de superposition. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée. Méthode de la variation de la constante. Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.
c) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $$y'' + ay' + by = f(x)$$ où a et b sont des scalaires et f est une fonction réelle ou complexe, définie et continue sur un intervalle.	Équation homogène associée.
Ensemble des solutions de l'équation homogène.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Principe de superposition.	
Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B\cos(\omega x)$ et $x \mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme.

Nombres réels et suites numériques – COURS SEULEMENT

L'objectif de cette section est de donner une base solide à l'étude des suites réelles. On insiste sur le caractère fondamental de la propriété de la borne supérieure.

Dans l'étude des suites, on distingue nettement les aspects qualitatifs (monotonie, convergence, divergence) des aspects quantitatifs (majoration, encadrement, vitesse de convergence ou de divergence).

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Ensembles de nombres usuels	
Entiers naturels, relatifs, nombres décimaux, rationnels, réels, irrationnels.	Les constructions des ensembles de nombres usuels (et en particulier celle de $\mathbb{R}$) sont hors programme.
Approximations décimales d'un réel.	Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès.
Tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.	
b) Propriété de la borne supérieure	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).	Notations $\sup X$, $\inf X$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous a, $b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a,b] \subset X$.	
c) Généralités sur les suites réelles	
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone. Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\left(\lvert u_n\rvert\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
d) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite. Unicité de la limite.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Notations $u_n \longrightarrow \ell$, $\lim u_n$.
Suite convergente, divergente. Toute suite convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.
Passage à la limite d'une inégalité large. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.	

Programme de cette colle :

- question de cours sur le début du cours sur les réels et les suites. Pour l'instant, le but est de réussir à maîtriser quelques raisonnements epsilonnesques de base. Ne pas hésiter à passer du temps sur cette question de cours.
- Exercices sur les équations différentielles : on est bien davantage sur du calcul explicite que sur de l'étude qualitative mais c'est possible en deuxième partie d'exercice.

Exemples de questions de cours Révisions sur les réels.

1. Caractérisation epsilonesque de la borne supérieure/borne inférieure.
2. Équivalence de deux définitions de la densité.
3. Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
4. Densité $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Cours sur les suites

5. Une suite bornée àpcr est bornée.
6. Définitions de la limite + une suite convergente est bornée.
7. Unicité de la limite.
8. Si $u_n \to \ell < a$, alors $u_n < a$ àpcr.
9. Limite d'une somme.