

MPSI1 – Programme de colles

Semaine 07 – du 13 au 17 novembre 2023

Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral

B - Primitives et équations différentielles linéaires

CONTENUS CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Calcul de primitives

Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.

Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.

Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$,

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Intégration par parties, changement de variable.

Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles.

On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f , $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$ a pour dérivée f .

On pourra noter $\int_{x_0}^x f(t) dt$ une primitive générique de f .

Primitives de $x \mapsto e^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$.

Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.

Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

b) Équations différentielles linéaires du premier ordre

Équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' + a(x)y = b(x)$$

où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Ensemble des solutions de l'équation homogène.

Principe de superposition.

Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.

Méthode de la variation de la constante.

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Équation homogène associée.

Cas particulier où la fonction a est constante.

Programme de cette colle :

- questions de cours sur les intégrales et les équations différentielles du premier ordre.
- exercices sur les intégrales uniquement (éventuellement, un peu de premier ordre en fin de semaine)

Exemples de questions de cours

1. Primitives de $\ln$, de $\arctan$, etc.
2. Soit $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n dt$. Déterminer pour tout entier n une relation entre W_n et W_{n+2} , et en déduire une expression de W_{2p} .
3. Intégrale et parité/imparité/périodicité.
4. Ensemble des solutions de $y' + a(x)y = 0$ où $a : I \rightarrow \mathbb{R}$.
5. Existence et unicité de la solution du problème de Cauchy $y' + a(x)y = 0$, $y(x_0) = y_0$.
6. Méthode de variation de la constante : explication de la méthode, application à un exemple simple. (ex : $y' + \tan(x)y = \sin(x)$)
7. Existence et unicité de la solution du problème de Cauchy $y' + a(x)y = b(x)$, $y(x_0) = y_0$. (à partir de mardi uniquement)