

MPSI1 – Programme de colles

Semaine 06 – du 6 au 10 novembre 2023

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Applications et relations	
Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F . Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notations $\mathcal{F}(E, F)$ et F^E .
Famille d'éléments d'un ensemble. Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble. Restriction et prolongement. Image directe. Image réciproque.	Notation $\mathbb{1}_A$. Notation $f _A$. Notation $f(A)$. Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.
Composition. Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections. Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée. Relation binaire sur un ensemble. Relation d'équivalence, classes d'équivalence.	Notation f^{-1} . Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque. La notion d'ensemble quotient est hors programme. Les classes d'équivalence forment une partition de l'ensemble sous-jacent. Congruences dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{Z}$. Notation $a \equiv b [c]$.
Relation d'ordre. Ordre partiel, total. Majorant, minorant, plus grand élément, plus petit élément, borne supérieure, borne inférieure.	

Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

- définition avec des ε de la borne supérieure, de la borne inférieure
- caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$
- densité : définition, densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Techniques fondamentales de calcul différentiel et intégral

B - Primitives et équations différentielles linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f , $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$ a pour dérivée f .
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.	On pourra noter $\int_{x_0}^x f(t) dt$ une primitive générique de f . Primitives de $x \mapsto e^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$.

CONTENUS

Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Intégration par parties, changement de variable.

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.

Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

Programme de cette colle :

- une question de cours sur les applications ou relations, ou sur les intégrales. Un petit calcul d'intégral est une bonne question de cours.
- exercices sur les applications/relations (surtout !) et le calcul intégral (éventuellement). Absolument rien de théorique pour le moment sur les intégrales.

Exemples de questions de cours

1. Définitions, exemples de relations d'équivalence
2. Définitions, exemples de relations d'ordre.
3. Notions de majorant, minorant, plus petit élément, plus grand élément, borne supérieure, inférieure.
4. En admettant que toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, démontrer que toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure
5. Caractérisation de la borne supérieure avec des ε .
6. Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$: énoncé + un exemple pour la preuve (par exemple, je prends I vérifiant $\forall x \leq y, [x, y] \subset I$, je suppose que I est majoré et minoré, qu'il contient sa borne supérieure mais pas sa borne inférieure : montrer que $I =]a, b[$)
7. Définitions équivalentes de la densité.
8. Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$
9. Densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$
10. Calcul d'une intégrale nécessitant une IPP ou un changement de variables simple