Chapitre 8
Une suite définie implicitement

On a montré que pour tout n dans $\mathbb{N}$, il existait un unique x_n de $\mathbb{R}_+$ vérifiant

$$x_n^n + nx_n - 1 = 0.$$

On a noté $f_n : x \mapsto x^n + nx - 1$ (c'était une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $[-1, +\infty[$). Et on cherche à déterminer le sens de variations de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour ce faire, $\boxed{\text{on étudie } f_{n+1}(x_n)}$: soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x_n) &= x_n^{n+1} + (n+1)x_n - 1 \\ &= x_n^{n+1} + x_n + nx_n - 1. \end{aligned}$$

Mais $nx_n - 1 = -x_n^n$ car $x_n^n + nx_n - 1 = 0$. Donc

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n^n + x_n = x_n(x_n^n - x_n^{n-1} + 1).$$

Or, on remarque facilement que $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ car $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = n > 0$. Ainsi, comme $x_n^n \leqslant x_n^{n-1}$, on a $-1 \leqslant x_n^n - x_n^{n-1} \leqslant 0$. Donc $x_n^n - x_n^{n-1} + 1 \geqslant 0$, donc $\boxed{f_{n+1}(x_n) \geqslant 0}$.
Or, $\boxed{f_{n+1}(x_{n+1}) = 0}$ donc, $\boxed{f_{n+1}(x_n) \geqslant f_{n+1}(x_{n+1})}$. Par stricte croissance de f_n, on en déduit que $x_n \geqslant x_{n+1}$, c'est-à-dire que $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

Remarque. En cours, j'avais remplacé x_n^{n+1} par $x_n \times x_n^n = x_n \times (-nx_n + 1)$. C'était ensuite + compliqué d'étudier les choses. Voilà pourquoi je vous propose cette manière d'étudier la monotonie de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ plus simplement !