MPSI1 – Programme de colles
Semaine 09 – du 27 novembre au 1er décembre 2023

Nombres réels et suites numériques

Contenus	Capacités & commentaires
a) Ensembles de nombres usuels	
Entiers naturels, relatifs, nombres décimaux, rationnels, réels, irrationnels. Approximations décimales d'un réel.	Les constructions des ensembles de nombres usuels (et en particulier celle de $\mathbb{R}$) sont hors programme. Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès.
Tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.	
b) Propriété de la borne supérieure	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure). Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a,b] \subset X$.	Notations $\sup X$, $\inf X$.
c) Généralités sur les suites réelles	
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone. Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\left(\lvert u_n\rvert\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
d) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite. Unicité de la limite.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Notations $u_n \longrightarrow \ell$, $\lim u_n$.
Suite convergente, divergente. Toute suite convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.
Passage à la limite d'une inégalité large. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.	
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).	Utilisation d'une majoration de la forme $\lvert u_n - \ell\rvert \leqslant v_n$, où (v_n) converge vers 0.
e) Suites monotones	
Théorème de la limite monotone. Théorème des suites adjacentes.	
f) Suites extraites	
Suite extraite. Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite. Théorème de Bolzano-Weierstrass.	Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ, alors (u_n) tend vers ℓ. Principe de démonstration par dichotomie.
h) Suites complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Théorème de Bolzano-Weierstrass.	

Programme de cette colle :

- cours sur les suites numériques (jusqu'aux suites extraites)
- exercices sur les suites (pas de récurrence linéaire d'ordre 2, pas de caractérisations séquentielles des propriétés de $\mathbb{R}$, pas d'asymptotique).

Exemples de questions de cours

1. Unicité de la limite.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell < a$, alors $u_n < a$ àpcr.
3. Opérations sur les limites : somme, produit, inverse. (poser l'une des opérations : le cas des limites finies a été fait en détail, et certains exemples ont été faits pour les cas infinis)
4. Passage à la limite dans les inégalités larges.
5. Théorèmes de majoration/minoration/encadrement.
6. Théorème de la limite monotone.
7. Suites adjacentes.
8. Théorème de Bolzano-Weierstrass (laisse le choix de la preuve : par dichotomie ou par le lemme de la « vue sur la mer »)
9. Théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{C}$ en admettant celle de $\mathbb{R}$.