DM 07
à rendre le lundi 27 novembre

Plan d'étude. En début de DM, merci de préciser la formule que vous avez choisie.

1. **Formule « bases ».** Faire le Problème 1, questions 1-7. Remarquer que les questions 1,2,3 seront faites en classe mercredi ! (2h)
2. **Formule « intermédiaire »** Faire le Problème 1 en entier. (3h)
3. **Formule « complète »** Problème 1 + exercices d'initiative. (3h+temps libre)

Problème 1. Autour de la convergence au sens de Cesàro

Dans tout l'énoncé, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ désigne une suite réelle, et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ désigne la suite définie par, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$. On dit que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ **converge au cens de Cesàro** si $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Dans tout le problème, si besoin est, on pourra utiliser sans justification que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

A. De la convergence à la convergence au sens de Cesàro

A-I. La convergence implique la convergence au sens de Cesàro

1. Dans cette question, **on suppose que** $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$,
$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k\right) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k\right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Correction

On sait que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc on dispose de $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Soit $n \geqslant n_0$. Alors

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k + \frac{n_0}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Or, pour tout $k \geqslant n_0$, $-\dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant u_k \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, donc

$$\frac{n_0}{n}\sum_{k=1}^{n} -\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{n_0}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \frac{n_0}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2},$$

c'est-à-dire que

$$-\frac{n-n_0+1}{n}\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{n_0}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \frac{n-n_0+1}{n}\frac{\varepsilon}{2}.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Or, $\dfrac{n-n_0+1}{n} \leqslant 1$ donc $-\dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant -\dfrac{n-n_0+1}{n}\dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\dfrac{n-n_0+1}{n}\dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, d'où

$$\boxed{-\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{n_0}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \frac{\varepsilon}{2},}$$

d'où

$$\boxed{\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k\right) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k\right) + \frac{\varepsilon}{2}}$$

(b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

Correction

Soit $\varepsilon > 0$. Par la question précédente, on dispose d'un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k\right) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k\right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mais $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k\right)$ est une somme finie indépendante de n, donc

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc on dispose de $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $-\dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k\right) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Posons $N = \max(n_0, n_1)$. Soit $n \geqslant N$. Alors $-\varepsilon \leqslant v_n \leqslant \varepsilon$, $\boxed{\text{ce qui prouve que } v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$

2. Démontrer que lorsque la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel ℓ quelconque, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.

Correction

Posons pour tout n dans $\mathbb{N}$, $w_n = u_n - \ell$. Alors $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, par la question précédente,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Mais, si $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \ell\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - \ell.$$

Donc $\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - \ell \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc

$$\boxed{\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.}$$

A-II. Application à l'étude d'une suite récurrente

On considère la suite définie par

$$x_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} = \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n}.$$

3. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $0 < x_n < 1$.

Correction

Montrons ce résultat par récurrence.
Initialisation. On sait que $x_2 = \frac{x_1(1+x_1)}{1+2x_1} = \frac{1(1+1)}{1+2} = \frac{2}{3} \in]0,1[$.
Hérédité. Supposons que pour un certain n, $x_n \in]0,1[$.
Déjà, $x_n > 0$ donc $x_n(1+x_n) > 0$ et $1+2x_n > 0$, donc $x_{n+1} > 0$.
Ensuite, comme $x_n > 0$, $1+x_n < 1+2x_n$, donc $\frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n} < x_n$ donc $x_{n+1} < x_n < 1$.
D'où l'hérédité et le résultat : $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ x_n \in]0,1[.}$

4. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

Correction

Soit n dans $\mathbb{N}$. Alors, comme $x_n > 0$, $1+x_n < 1+2x_n$ donc $x_n\frac{1+x_n}{1+2x_n} < x_n$ donc $x_{n+1} < x_n$. $\boxed{\text{Donc } (x_n)_{n\geqslant 1} \text{ est strictement décroissante.}}$

5. La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

Correction

La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est $\boxed{\text{décroissante minorée}}$ donc, d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{elle converge.}}$ Notons ℓ sa limite. Alors, $x_{n+1} = \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell(1+\ell)}{1+2\ell}$. Or, $x_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ donc, par unicité de la limite,

$$\ell = \frac{\ell(1+\ell)}{1+2\ell},$$

donc (**ATTENTION, ON NE PEUT PAS DIVISER PAR ℓ IMPUNÉMENT**) :

 nlaillet.math@gmail.com

- ou bien $\ell = 0$,
- ou bien $\ell \neq 0$, mais alors $1 = \dfrac{1+\ell}{1+2\ell}$, i.e. $1 + 2\ell = 1 + \ell$, i.e. $\ell = 0$, contradiction.

$\boxed{\text{Donc } \ell = 0.}$

Notons $a_1 = \dfrac{1}{x_1}$ et, pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = \dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{x_{n-1}}$. On note, pour tout $n \geqslant 1$, $b_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$.

6. Montrer que $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.

Correction

Soit n dans $\mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Alors Soit n dans $\mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}} &= \frac{1+2x_{n-1}}{x_{n-1}(1+x_{n-1})} - \frac{1}{x_{n-1}} \\ &= \frac{1+2x_{n-1}}{x_{n-1}(1+x_{n-1})} - \frac{1+x_{n-1}}{x_{n-1}(1+x_{n-1})} \\ &= \frac{1+2x_{n-1}-(1+x_{n-1})}{x_{n-1}(1+x_{n-1})} = \frac{x_{n-1}}{x_{n-1}(1+x_{n-1})} \boxed{= \frac{1}{1+x_{n-1}}}. \end{aligned}$$

Mais $x_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$.

7. En utilisant la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ et la convergence au sens de Cesàro, démontrer que

$$nx_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Correction

Soit n dans $\mathbb{N}$. Alors,

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}\right) + \frac{a_1}{n}.$$

Donc, par télescopage, $b_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_n}\right) = \dfrac{1}{nx_n}$. Mais, comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, elle converge au cens de Cesàro, donc $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $\dfrac{1}{nx_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $\boxed{nx_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$.

A-III. Différence des termes consécutifs

Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle quelconque.

8. On suppose que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Montrer que la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

Notons ℓ la limite de $(x_n)_{n\geqslant 1}$. Alors $x_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. $\boxed{\text{Donc } x_{n+1} - x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - \ell = 0.}$

9. On suppose que la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un nombre réel ℓ.

(a) Montrer que la suite $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et préciser sa limite. *On pourra s'inspirer des méthodes des questions 6. et 7..*

Correction

Posons pour tout $n \geqslant 2$ $y_n = x_n - x_{n-1}$ et $y_1 = x_1$. Alors par télescopage, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k = \dfrac{x_n}{n}$.
Or, $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc, par la propriété de la convergence au sens de Cesàro, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc $\boxed{\dfrac{x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell}$.

(b) Étudier la convergence ou la divergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans le cas où $\ell \neq 0$.

Correction

Si $\ell \neq 0$, on montre qu'elle tend vers $\pm\infty$, dépendamment du signe de ℓ.
Si $\ell > 0$**,** soit μ tel que $0 < \mu < \ell$. Alors, comme $\dfrac{x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, on a, à partir d'un certain rang, $\dfrac{x_n}{n} > \mu$, donc $x_n > \mu n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$, donc $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ par minoration}}$.
De même, si $\ell < 0$, on montre que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

(c) Dans le cas où $\ell = 0$, la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle nécessairement convergente ?

Correction

Pas nécessairement ! Elle peut l'être (par la première question, si (x_n) converge alors $(x_{n+1} - x_n)$ converge vers 0), mais si on prend $x_n = \ln(n)$, alors pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$x_{n+1} - x_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

B. De la convergence au sens de Cesàro à la convergence

B-I. La réciproque du A-I. est fausse

Dans les deux questions suivantes, on pose, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = (-1)^n$ et $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

10. Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$.

Correction

Soit n dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \\ &= \frac{1}{n}(-1)\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} \\ &= \frac{1}{n}\frac{(-1)^n-1}{2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{|v_n| = \frac{1}{2n}|(-1)^n - 1| \leqslant \frac{2}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

11. Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ n'a pas de limite et conclure quant à la validitié de la réciproque de la proposition établie en A-I.

Correction

$(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1 et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à -1, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède deux suites extraites qui convergent vers deux limites différentes, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite. Donc la réciproque de la proposition A-I. n'est pas vraie en général.

B-II. Une réciproque possible de la propriété A-I.

Dans cette question, on suppose que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

12. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} \leqslant 2v_{2n} - v_n$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Correction

Soit $n \geqslant 1$. Alors

$$2v_{2n} - v_n = 2\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} u_k$$

Par croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a, pour tout k dans $[\![n+1, 2n]\!]$, $u_k \geqslant u_{n+1}$. Donc

$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_{n+1} = (2n-(n+1)+1)u_{n+1} = nu_{n+1}.$$

Donc

$$\boxed{2v_{2n} - v_n \geqslant u_{n+1}.}$$

13. Établir la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et préciser sa limite.

Correction

La convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'établit simplement, car $(2v_{2n} - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est majorée, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc elle converge.
Pour la limite, faisons un encadrement. Par croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$, $u_k \leqslant u_n$. Donc, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\boxed{v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_n \leqslant u_n.}$$

Donc, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$v_n \leqslant u_n \leqslant 2v_{2n} - v_n.$$

Or, on suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ, donc, comme (v_{2n}) est une suite extraite de (v_n), elle converge aussi vers ℓ. Donc $2v_{2n} - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

$\boxed{\text{On en déduit, par théorème d'encadrement, que } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.}$

14. Énoncer la propriété ainsi démontrée sous la forme d'une condition nécessaire et suffisante.

Correction

On vient donc de démontrer que pour toute suite croissante $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, alors $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ **si, et seulement si** $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge vers ℓ.

Exercice 1. Donner un sens à l'égalité suivante et la démontrer :

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Exercice 2. Soit x un irrationnel, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels convergeant vers x. On note $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ où $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{pgcd}(p_n, q_n) = 1$. Montrer que, nécessairement, $q_n \to +\infty$.
Attendre jeudi pour traiter cet exercice.