

DM 06 à rendre le lundi 20 novembre

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur $I =]0, +\infty[$ suivante :

$$xy' + ny = \frac{1}{1+x^2} \quad (E_n)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, définissons la fonction F_n par : $\forall x \geq 0, F_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2} dt$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation différentielle linéaire homogène (H_n) associée à (E_n) :

$$xy' + ny = 0 \quad (H_n)$$

Correction

L'équation différentielle s'écrit $y' + \frac{n}{x}y = 0$. Or, $\int^x \frac{n}{t} dt = n \ln(t)$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène est

$$\{x \mapsto \lambda e^{-n \ln(x)}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto \frac{\lambda}{x^n}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

2. Résoudre (E_0) .

On pourra chercher des réels a, b, c tels que : $\forall x > 0, \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$

Correction

L'équation (E_0) s'écrit $y' = \frac{1}{x(1+x^2)}$. Or, $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$.

Comme

$$\int^x \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2} dt = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2),$$

l'ensemble des solutions de (E_0) est

$$\left\{ x \mapsto \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'ensemble des solutions de (E_n) en fonction de F_n .

Correction

L'ensemble des solutions de l'équation homogène a déjà été trouvé : il s'agit de

$$\{x \mapsto \frac{\lambda}{x^n}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Soit désormais f une fonction quelconque. Notons $h : x \mapsto f(x) \cdot x^n$. Alors f est solution de (E_n) si et seulement si

$$h'(x) = x^n \times \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{x^{n-1}}{1+x^2}.$$

Or, F_n est une primitive de $x \mapsto \frac{x^{n-1}}{1+x^2}$, donc $x \mapsto \frac{F_n(x)}{x^n}$ est une solution particulière de l'équation. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

$$\left\{ x \mapsto \frac{F_n(x)}{x^n} + \frac{\lambda}{x^n}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Montrer que

$$\forall x \geq 0, F_n(x) = \frac{x^n}{n(1+x^2)} + \frac{2}{n} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(1+t^2)^2} dt$$

Correction

On pose $u'(t) = t^{n-1}$, $u(t) = \frac{t^n}{n}$, $v(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $v'(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}$. Ainsi, par intégration par parties, on a le résultat désiré !

5. Démontrer que pour tout $x > 0$

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(1+t^2)^2} dt \leq x^{n+2}.$$

Correction

On remarque que pour tout t entre 0 et x , $0 \leq t^{n+1} \leq x^{n+1}$ et $0 \leq 1+t^2 \geq 1$. Ainsi,

$$0 \leq \frac{t^{n+1}}{(1+t^2)^2} \leq x^{n+1}.$$

En intégrant les inégalités, il vient

$$0 \leq F_n(x) \leq \int_0^x x^{n+1} dt = x^{n+2}.$$

6. En déduire qu'il existe une unique solution de (E_n) qui admet une limite finie en 0 (à préciser). On note cette solution z_n . Exprimer z_n en fonction de F_n et de x^n et démontrer que

$$\forall x > 0, z_n(x) = \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{1+x^2 u^2} du$$

Correction

Déjà, par l'encadrement précédent, $\frac{F_n(x)}{x^n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{n}$. Ensuite, si z_n est une solution de (E_n) ayant une limite nulle en 0, on dispose de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$, $z_n(x) = \frac{F_n(x)}{x^n} + \frac{\lambda}{x^n}$. Comme $\frac{F_n(x)}{x^n}$ possède une limite finie quand x tend vers 0, on en déduit que $\lambda = 0$. Donc nécessairement, $z_n(x) = \frac{F_n(x)}{x^n}$.

Réciproquement, une telle fonction est solution du problème.

Donc pour tout $x > 0$,

$$z_n(x) = \frac{1}{x^n} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2} dt.$$

On fait le changement de variables $u = \frac{t}{x}$.

Quand $t = 0$, $u = 0$. Quand $t = x$, $u = 1$. Ensuite, $\frac{t^{n-1}}{1+t^2} = x^{n-1} \frac{u^{n-1}}{1+(ux)^2}$. Enfin, $dt = xdu$. Donc

$$z_n(x) = \frac{1}{x^n} \int_0^1 \frac{x^{n-1} u^{n-1}}{1+(xu)^2} x du = \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{1+(xu)^2} du.$$

7. Soit z une solution de (E_n) et Z une primitive de z . Montrer qu'il existe un réel C tel que Z soit solution de l'équation différentielle d'inconnue y : $xy' + (n-1)y = \text{Arctan}(x) + C$.

Correction

Dérivons $f(x) = xZ' + (n-1)Z - \text{Arctan}(x)$:

$$f'(x) = Z' + xZ'' + (n-1)Z' - \frac{1}{1+x^2} = nZ' + xZ'' - \frac{1}{1+x^2} = nz + xz' - \frac{1}{1+x^2} = 0,$$

car z est solution de (E_n) . Donc f est constante, d'où le résultat désiré !

8. Démontrer que z_n admet une unique primitive de limite nulle en 0. On la note Z_n . Démontrer que $Z_n(1) = \frac{1}{n-1} \left(\frac{\pi}{4} - z_n(1) \right)$.

Correction

Déjà, z_n est prolongeable par continuité en 0. Donc $x \mapsto \int_0^x z_n(t) dt$ est l'unique primitive de z_n s'annulant en 0 (donc ayant une limite nulle en 0!!).

Comme $xz_n + (n-1)Z_n = \text{Arctan}(x) + C$, en évaluant en 0, on remarque que $C = 0$.

De plus, en évaluant en 1, $(n-1)Z_n(1) = \frac{\pi}{4} - z_n(1)$, d'où le résultat désiré !

Exercice 2. Bonus. Déterminer l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que pour tout x dans \mathbb{R} , $f(x) = \sin(x) + 2 \int_0^x e^{x-t} f(t) dt$.

Correction

Analyse. Soit f une solution du problème. Alors pour tout x dans \mathbb{R} ,

$$f(x) = \sin(x) + 2e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt.$$

Comme $x \mapsto \int_0^x e^{-t} f(t) dt$ est dérivable, f est dérivable et pour tout x dans \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) + 2e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt + 2e^x e^{-x} f(x) \\ &= \cos(x) + 2e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt + 2f(x) = \cos(x) + f(x) - \sin(x) + 2f(x), \end{aligned}$$

donc f vérifie

$$f'(x) - 3f(x) = \cos(x) - \sin(x).$$

Résolvons donc $y' - 3y = \cos(x) - \sin(x)$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\{x \mapsto \lambda e^{3x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Pour trouver une solution particulière, on cherche une solution sous la forme $g : x \mapsto h(x)e^{3x}$. Alors h est solution de

$$h'(x) = e^{-3x}(\cos(x) - \sin(x)).$$

On prend alors $h : x \mapsto \int_0^x e^{-3t}(\cos(t) - \sin(t)) dt$. On fait une intégration par parties, en dérivant e^{-3t} et en intégrant $\cos(t) - \sin(t)$. Alors

$$h(x) = [e^{-3t}(\sin(t) + \cos(t))]_0^x + 3 \int_0^x e^{-3t}(\sin(t) + \cos(t)) dt.$$

Dans la deuxième intégrale, on pose à nouveau $u(t) = e^{-3t}$ et $v'(t) = \sin(t) + \cos(t)$. Alors

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-3t}(\sin(t) + \cos(t)) dt &= [e^{-3t}(-\cos(t) + \sin(t))]_0^x + 3 \int_0^x e^{-3t}(-\cos(t) + \sin(t)) dt \\ &= e^{-3x}(\sin(x) - \cos(x)) + 1 - 3h(x), \end{aligned}$$

donc

$$h(x) = e^{-3x}(\sin(x) + \cos(x)) - 1 + 3e^{2x}(\sin(x) - \cos(x)) + 3 - 9h(x),$$

donc

$$h(x) = \frac{1}{5}e^{3x}(2\sin(x) - \cos(x)) + \frac{1}{5}.$$

Changer la constante ne change pas le fait que l'on ait une primitive, donc une solution particulière de l'équation différentielle est $x \mapsto \frac{1}{5}(2\sin(x) - \cos(x))$.

Donc on dispose de λ dans \mathbb{R} tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{5}(2\sin(x) - \cos(x)) + \lambda e^{-3x}$.

Comme $f(0) = 0$, $\lambda = \frac{1}{5}$, donc $f(x) = \frac{1}{5}(2\sin(x) - \cos(x)) + \frac{1}{5}e^{-3x}$.

La **synthèse** est pour vous...