

MPSI1 – Programme de colles

Semaine 10 – du 4 au 8 décembre 2023

Nombres réels et suites numériques

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Généralités sur les suites réelles	
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone. Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.	Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
d) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite. Unicité de la limite. Suite convergente, divergente. Toute suite convergente est bornée. Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient. Passage à la limite d'une inégalité large. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang. Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Notations $u_n \rightarrow \ell$, $\lim u_n$. Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle. Utilisation d'une majoration de la forme $ u_n - \ell \leq v_n$, où (v_n) converge vers 0.
e) Suites monotones	
Théorème de la limite monotone. Théorème des suites adjacentes.	
f) Suites extraites	
Suite extraite. Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite. Théorème de Bolzano-Weierstrass.	Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ , alors (u_n) tend vers ℓ . Principe de démonstration par dichotomie.
g) Traduction séquentielle de certaines propriétés	
Partie dense de $\mathbb{R}$. Caractérisation séquentielle de la densité. Si X est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$ (resp. $+\infty$).	Une partie de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide. Densité de l'ensemble des décimaux, des rationnels, des irrationnels. Résultats analogues pour X non vide minorée (resp. non minorée).
h) Suites complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents. Théorème de Bolzano-Weierstrass.	Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.
i) Suites particulières	
Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques. Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants. Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ sur quelques exemples simples. Représentation géométrique. Si (u_n) converge vers un élément ℓ en lequel f est continue, alors $f(\ell) = \ell$.	Pour une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, recherche d'une solution constante, détermination des solutions. Cette étude est l'occasion d'introduire la notion d'intervalle stable par une fonction. Pour l'étude de la monotonie de (u_n) , on souligne l'intérêt, d'une part, de l'étude du signe de $f(x) - x$, et, d'autre part, de l'utilisation de la croissance éventuelle de f .

j) Bases d'asymptotiqueNotation de Landau o , O , $\sim$.

Prépondérances classiques.

Équivalents classiques.

Règles de calcul sur o , O , $\sim$. Contre-exemples sur l'impossibilité de sommer, de composer (par exp notamment)Croissances comparées, comparaison de $n!$ et x^n , $n!$ et n^n .Si $u_n \rightarrow 0$, équivalents de $e^{u_n} - 1$, de $\ln(1 + u_n)$, de $\sin(u_n)$, $\tan(u_n)$, $\cos(u_n) - 1$, $\arctan(u_n)$, $\arcsin(u_n)$, $(1 + u_n)^\alpha - 1$.**Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs – COURS SEULEMENT**

L'objectif de cette section est d'étudier les propriétés de la divisibilité des entiers et des congruences. L'approche préconisée reste élémentaire en ce qu'elle ne fait pas appel au langage des structures algébriques.

a) Divisibilité et division euclidienneDivisibilité dans $\mathbb{Z}$, diviseurs, multiples.

Théorème de la division euclidienne.

Caractérisation des couples d'entiers associés.

b) PGCD et algorithme d'Euclide

PGCD de deux entiers naturels dont l'un au moins est non nul.

Algorithme d'Euclide.

Extension au cas de deux entiers relatifs.

Relation de Bézout.

Notation $a \wedge b$. Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans $\mathbb{N}$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b .L'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs de $a \wedge b$. $a \wedge b$ est le plus grand élément (au sens de la divisibilité) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b .Pour $k \in \mathbb{N}^*$, PGCD de ka et kb .

Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.

Programme de cette colle :

- cours sur les suites numériques et le tout début de l'arithmétique
- exercices sur les suites : quartier libre !

Exemples de questions de cours

1. Révisions sur les suites
2. Théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{C}$
3. Caractérisation séquentielle de la borne supérieure
4. Caractérisation séquentielle de la densité
5. Démontrer la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et/ou de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, avec des suites
6. Suites arithmético-géométriques
7. Comparaison de x^n , $n!$, n^n .
8. Théorème de la division euclidienne (dans $\mathbb{N}$).
9. Relation de Bézout
10. Explication de l'algorithme d'Euclide, explication de la correction et de la terminaison du programme