

MPSI1 – Programme de colles

Semaine 12 – du 18 au 22 décembre 2023

Fonctions d'une variable réelle : limites et continuité

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point et, sauf dans les paragraphes A-d) et B-e), sont à valeurs réelles. On dit qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert centré en a si a est réel, avec un intervalle $]a, +\infty[$ si $a = +\infty$, avec un intervalle $]-\infty, a[$ si $a = -\infty$.

A - Limites et continuité

Le paragraphe a) consiste largement en des adaptations au cas continu de notions déjà étudiées pour les suites. Afin d'éviter des répétitions, le professeur a la liberté d'admettre certains résultats.

Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs très simples, en attendant de disposer d'outils efficaces (développements limités).

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Limite d'une fonction en un point	
Étant donné un point a de $\overline{\mathbb{R}}$ appartenant à I ou extrémité de I , limite finie ou infinie d'une fonction en a . Unicité de la limite. Si f est définie en a et possède une limite en a , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Si f possède une limite finie en a , alors f est bornée au voisinage de a . Limite à droite, limite à gauche. Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie). Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition. Passage à la limite d'une inégalité large. Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$). Théorème de la limite monotone.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Notations $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Notations $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
b) Continuité en un point	
Continuité, prolongement par continuité en un point. Continuité à gauche, à droite. Caractérisation séquentielle de la continuité en un point. Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.	La continuité de f au point a de I est définie par la relation $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.
c) Continuité sur un intervalle	
Continuité sur un intervalle. Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle par une fonction continue. Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone. Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Image d'un segment par une fonction continue. Une fonction continue sur un intervalle, à valeurs réelles et injective, est strictement monotone. Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.	Principe de démonstration par dichotomie. La démonstration n'est pas exigible. La démonstration n'est pas exigible.

d) Fonctions complexes

Brève extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité.

Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire.

e) Asymptotique

Extension des notations de Landau ($o/O/\sim$) aux fonctions. Équivalents usuels.

Au programme :

- cours sur les limites de fonctions et la continuité.
- exercices sur le même thème : **attention, peu d'exercices ont été faits**. Ne pas hésiter à poser un peu d'asymptotique.

Exemples de questions de cours

1. Définition des limites de fonctions réelles en termes de voisinages + avec des ε/η /etc.
 2. Limite d'une fonction évaluée en une suite.
 3. Caractérisation séquentielle de la limite.
NB : les opérations sur les limites de fonctions n'ont pas été re-démontrées (mais vue comme conséquences de la caractérisation séquentielle).
 4. Théorème de la limite monotone (notamment en un point intérieur à l'intervalle).
 5. Théorème des valeurs intermédiaires, par dichotomie.
 6. Théorème des valeurs intermédiaires, par borne supérieure.
 7. Lien entre injectivité et monotonie.
 8. Monotonie et continuité de la bijection réciproque.
 9. Théorème des bornes atteintes.
-