MPSI1 – Programme de colles
Semaine 13 – du 8 au 13 janvier 2024

Continuité

Structures algébriques usuelles

Cette section a pour but l'introduction des notions les plus élémentaires relatives aux groupes, anneaux, corps, afin de traiter de manière unifiée un certain nombre de situations.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Loi de composition interne	
Loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité. Partie stable.	On évite l'étude de lois artificielles. Inversibilité et inverse du produit de deux éléments inversibles.
b) Structure de groupe	
Groupe.	Notation x^n dans un groupe multiplicatif, nx dans un groupe additif. Exemples usuels : groupes additifs $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, groupes multiplicatifs $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}_+^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{U}$, $\mathbb{U}_n$.
Groupe des permutations d'un ensemble.	Notation S_X.
Groupe produit.	
Sous-groupe : définition, caractérisation.	
Morphisme de groupes. Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme.	
Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité.	Notations $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} f$.
Isomorphisme.	
c) Structures d'anneau et de corps	
Anneau.	Tout anneau est unitaire. Exemples usuels : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
Calcul dans un anneau.	Relation $a^n - b^n$ et formule du binôme si a et b commutent.
Groupe des inversibles d'un anneau.	
Anneau intègre. Corps.	Les corps sont commutatifs.
Sous-anneau.	
Morphisme d'anneaux. Isomorphisme.	

Au programme :

- cours : structures algébriques (sans permutations)
- exercices : révisions de continuité + exercices d'algèbre (surtout des groupes)

Exemples de questions de cours

1. Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.
2. L'intersection de sous-groupes est un sous-groupe.
3. La composée de deux morphismes est un morphisme de groupes ; la réciproque d'un isomorphisme de groupes est un isomorphisme de groupes.
4. Si φ est un morphisme, valeur de $\varphi(e_G)$, de $\varphi(x^{-1})$.
5. L'image directe/réciproque d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe.
6. Lien entre noyau et injectivité.
7. Description des solutions de $\varphi(x) = y$ où φ est un morphisme de groupes.
8. Intégrité. Exemples d'anneaux non intègres.
9. Vérification qu'un ensemble simple est un sous-anneau (décimaux pour $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}[i]$ pour $\mathbb{C}$)