TD 12
Dérivabilité

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. ●◐○ Soit $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0. \end{cases} \end{array} \right.$

1. Montrer que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et que : $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que $\forall x > 0$, $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. *Théorème de Rolle à l'infini*. ●◐○ Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]0, +\infty[$ et telle que $f(0) = \lim\limits_{+\infty} f = 0$. On souhaite démontrer qu'il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

1. Démontrer que le résultat est trivial si f est constante.

On suppose désormais que f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que l'on dispose de $c > 0$ tel que $f(c) > 0$.

2. Démontrer qu'il existe $a \in]0, c[$ et $b \in]c, +\infty[$ tel que $f(a) = f(b)$.

3. Conclure

Exercice 3. *Polynômes de Legendre*. ●●○ Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On définit, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $P_n(x) = (x^2 - 1)^n$.

1. Démontrer que pour tout $k \leqslant n-1$, $P_n^{(k)}$ s'annule en -1 et en 1.

Correction

Écrivons $P_n(x) = (x-1)^n(x+1)^n = f_n g_n$. Alors, par la formule de Leibniz, pour tout k, pour tout x dans $\mathbb{R}$.

$$P_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f_n^{(j)}(x) g_n^{(k-j)}(x).$$

Mais, si $j \in [\![0, k]\!]$, $f_n^{(j)}(x) = \dfrac{n!}{(n-j)!}(x-1)^{n-j}$, qui s'annule en 1, et $g_n^{(k-j)}(x) = \dfrac{n!}{(k-j)!}(x+1)^{n-k+j}$, qui s'annule en -1. Donc $P_n^{(k)}$ s'annule en -1 et en 1.

2. Démontrer que pour tout $k \leqslant n$, $P_n^{(k)}$ s'annule k fois sur $]-1, 1[$.

Correction

Démontrons le résultat par récurrence sur k.
Initialisation. $P_n^{(0)} = P_n$ s'annule en -1 et en 1.

Hérédité. Supposons que, pour un certain $k \leqslant n-1$, $P_n^{(k)}$ s'annule en k points sur $]-1,1[$, nommons ces points $x_1, \ldots, x_k$. Alors, pour tout i dans $[\![1, k-1]\!]$, $P_n^{(k)}$ est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$, dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$, s'annule en x_i et en x_{i+1} donc, d'après le théorème de Rolle, $P_n^{(k+1)}$ s'annule sur $]x_i, x_{i+1}[$. Donc P_n^{k+1} s'annule en $k-1$ points de $]-1,1[$.
De plus, $P_n^{(k)}$ s'annule en -1 et en 1, donc, en appliquant le théorème de Rolle entre -1 et x_1 puis entre x_k et 1, on obtient deux zéros supplémentaires de $P_n^{(k+1)}$.
Donc $P_n^{(k+1)}$ s'annule $k+1$ fois, d'où l'hérédité et le résultat !

Exercice 4. ●○○ Soit $a > 0$. Déterminer, en utilisant le théorème des accroissements finis, la limite

$$\lim_{n \to +\infty} n^2(\operatorname{Arctan}(n+a) - \operatorname{Arctan}(n)).$$

Exercice 5. *La règle de L'Hôpital*. ●●○

1. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Correction

Il s'agit de ce que l'on appelle la formule des « accroissements finis généralisés » . On va donc la démontrer de manière similaire au TAF. Considérons la fonction h définie sur $[a,b]$ par

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x).$$

Alors h est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et

$$h(a) = (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a),$$
$$h(b) = (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b) = h(a).$$

Donc d'après le théorème de Rolle, il existe un réel c de $]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$, i.e. tel que

$$(f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0,$$

i.e.

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

2. Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I non vide et non réduit à un point et x_0 une extrémité (finie ou non) de I. On suppose que f et g tendent vers 0 en x_0 et que g et g' ne s'annulent pas sur $\mathrm{I} \backslash \{x_0\}$. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Prouver l'implication

$$\left(\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \right) \implies \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \right).$$

Correction

Il faut distinguer deux cas : le cas où $x_0 \in \mathbb{R}$, et le cas où cette borne est infinie.

- Cas où $x_0 \in \mathbb{R}$. Quitte à remplacer f et g par leur prolongement par continuité en x_0, on peut supposer f et g définies, continues, et s'annulant en x_0. En appliquant le théorème des accroissements finis généralisé entre x_0 et $x \neq x_0$, on obtient l'existence de c_x entre x_0 et x tel que
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)},$$
i.e.
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$
Or, par encadrement, $\lim\limits_{x \to x_0} c_x = x_0$, donc en composant les limites, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \ell$.
Donc $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ converge et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$.
- Cas où $x_0 = +\infty$. Posons alors deux fonctions F et G, définies sur un voisinage épointé à droite 0 par $F(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $G(x) = g\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Alors f et g vérifient les hypothèses du résultat précédent, et
$$\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{-\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2} g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)} \underset{x \to 0+}{\longrightarrow} \ell.$$
On en déduit donc le résultat pour $x_0 = +\infty$!

3. Retrouver comme cas particulier le théorème de la limite de la dérivée vu en cours.

Correction

On retrouve le résultat en prenant $g(x) = x$!

4. Appliquer ce résultat aux calculs des limites suivantes

(a) $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln x - 1}$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{c^x - d^x}$ $(c \neq d)$,

(c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin x - \sin \frac{1}{x}}{e^x - e^{1/x}}$

(d) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2} \right)$

Correction

Applications (on ne réécrit pas à chaque fois que les fonctions vérifient les hypothèses de la règle de l'Hôpital mais c'est important de les vérifier : est important le fait que g' soit de signe constant autour de x_0. En effet, si
$$f(x) = x + \cos(x)\sin(x) \text{ et } g(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}(x + \cos(x)\sin(x))$$

alors
$$f'(x) = 2\cos^2(x) \text{ et } g'(x) = e^{\sin(x)}\cos(x)(x+\sin(x)\cos(x)+2\cos(x))$$
donc
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cos(x)}{e^{\sin(x)}(x+\sin(x)\cos(x)+2\cos(x))} = 0,$$
mais $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{e^{\sin(x)}}$ n'admet pas de limite en $+\infty$!)

(a) $\displaystyle\lim_{x\to e} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln x - 1} = \lim_{x\to e} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \sqrt{e}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(a)a^x - \ln(b)b^x}{\ln(c)c^x - \ln(d)d^x} = \frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{\ln\left(\frac{c}{d}\right)}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin x - \sin\dfrac{1}{x}}{e^x - e^{1/x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\cos x + \frac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}}{e^x + \frac{1}{x^2}e^{1/x}} = \frac{\cos(1)}{e}$

Stratégie :

- Il faut pouvoir calculer des dérivées : les exercices 6 et 7 servent à cela.
- Il faut pouvoir étudier des dérivabilités : les exercices 10, 11, 12 (prolongement de 12) sont dédiés à cela.
- Deux exercices s'appuient sur la dérivée comme développement limité à l'ordre 1 : l'exercice 8, assez simple, et l'exercice 15, beaucoup plus complexe.
- Des applications du théorème de Rolle : quelques très classiques comme 16 ou . Les exercices 17, 18 et 19 sont ussi des applications très faisables de Rolle.
- Des applications du TAF : outre 4, les exercices 21 et 22 sont assez importants. 23 est une variation.
- Quelques autres exercices intéressants comme 24 et surtout 25.

Minimum requis : exercice 6 ((a) et (d)), exercice 7 ((a) et (b)), exercice 12 **si jamais le 1 a mal été compris**, exercice 16 et 3, exercice 21.

2 Dérivabilité et définition de la dérivée – classe $\mathscr{C}^n$ – limite de la dérivée

Exercice 6. ◐○○

Dériver les fonctions suivantes

1. $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$
2. $g : x \mapsto \sqrt[3]{\sin\left(\frac{x+1}{x+2}\pi\right)}$
3. $h : x \mapsto \ln\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2+x}\right)$
4. $k : x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$.

Correction

1. $f' : x \mapsto \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$
2. $g' : x \mapsto \frac{1}{3}\left(\sin\left(\frac{x+1}{x+2}\pi\right)\right)^{-\frac{2}{3}} \times \cos\left(\frac{x+1}{x+2}\pi\right) \times \frac{\pi}{(x+2)^2}$.
3. $h' : x \mapsto \frac{4x^2-4x-2}{x(x+1)(x^2-3x+2)}$.
4. $k' : x \mapsto \frac{1+\tan^2(x)}{2\sqrt{\tan(x)}}$.

Exercice 7. ●○○

Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions suivantes

1. $f : x \mapsto a^x$ $(a > 0)$
2. $g : x \mapsto xe^x$
3. $h : x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2-1}$
4. $k : x \mapsto e^{x\sqrt{3}}\cos(x)$

Correction

1. On montre par récurrence, et en utilisant que $a^x = e^{x\ln(a)}$, que pour tout n, $f^{(n)} : x \mapsto (\ln(a))^n a^x$.
2. On montre, en utilisant la formule de Leibniz, ou par récurrence que, pour tout n, $f^{(n)} : x \mapsto ne^x + xe^x$.
3. Écrivons
$$h(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^2-1+2}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1},$$
donc si $n > 0$,
$$h^{(n)}(x) = (-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-1)^n} - \frac{1}{(x+1)^n}\right).$$
4. Écrivons $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$. Alors pour tout réel x,
$$k(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x(\sqrt{3}+i)} + e^{x(\sqrt{3}-i)}\right),$$
donc
$$k^{(n)} = \frac{1}{2}\left((\sqrt{3}+i)^n e^{x(\sqrt{3}+i)} + (\sqrt{3}-i)^n e^{x(\sqrt{3}-i)}\right).$$
Or,
$$(\sqrt{3}+i)^n = 2^n e^{in\frac{\pi}{6}} \text{ et } (\sqrt{3}-i)^n = 2^n e^{-in\frac{\pi}{6}},$$

donc
$$k^{(n)}(x) = 2^n e^{\sqrt{3}x} \frac{e^{i\left(x+n\frac{\pi}{6}\right)} + e^{-i\left(x+n\frac{\pi}{6}\right)}}{2} = 2^n e^{\sqrt{3}x} \cos\left(x + n\frac{\pi}{6}\right).$$

Exercice 8. Démontrer que les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = \dfrac{1}{x}$ admettent une unique tangente commune.

Correction

Nommons $f_1 : x \mapsto x^2$ et $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ leurs courbes respectives.
Soit a dans $\mathbb{R}$. La tangente à $\mathscr{C}_1$ en a a pour équation $y = a^2 + 2a(x-a) = 2ax - a^2$.
Soit b dans $\mathbb{R}^*$. La tangente à $\mathscr{C}_2$ en b a pour équation $y = \dfrac{1}{b} - \dfrac{x-b}{b^2} = \dfrac{2}{b} - \dfrac{x}{b^2}$.
Ces deux droites coïncident si et seulement si

$$\begin{cases} 2a = -\dfrac{1}{b^2} \\ -a^2 = \dfrac{2}{b} \end{cases}$$

Ce système n'est pas linéaire, on peut substituer... La première équation étant $a = \dfrac{-1}{2b^2}$, la seconde devient $-\dfrac{1}{4b^4} = \dfrac{2}{b}$, i.e. $b^3 = -\dfrac{1}{8}$, i.e. $b = -\dfrac{1}{2}$, et donc $a = -2$. Réciproquement $(-2, -1/2)$ est bien solution.
Donc $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont une unique tangente commune, c'est la droite $y = -4x - 4$.

Exercice 9. ◐○○
Que dire de la dérivée d'une fonction paire ? d'une fonction impaire ? d'une fonction périodique ?

Correction

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. si f est paire alors pour tout x réel, $f(-x) = f(x)$ donc $-f'(-x) = f'(x)$ donc $f'(-x) = -f(x)$ donc f' est impaire.
2. si f est impaire alors pour tout x réel, $f(-x) = -f(x)$ donc $-f'(-x) = -f'(x)$ donc $f'(-x) = f(x)$ donc f' est paire.
3. si f est périodique, on dispose de $T > 0$ tel que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$, donc $f'(x+T) = f(x)$, donc f' est aussi T-périodique.

Exercice 10. ●○○

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes

1. $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$
2. $g : x \mapsto \begin{cases} (x-1)^2 \text{ si } x \leqslant 1, \\ (x-1)^3 \text{ si } x > 1. \end{cases}$

3. $h : x \mapsto x|x|$

4. $k : x \mapsto \dfrac{|x|}{1+|x-1|}$

Correction

1. La fonction f est **continue** sur $\mathbb{R}_+$ par les théorèmes généraux, et, de même, elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x > 0$, $f' : x \mapsto -\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$. Or, $\dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, donc $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc, par le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0 de dérivée égale à $-\dfrac{1}{2}$.
2. g est continue sur $\mathbb{R}$ (notamment en 1, car les limites à gauche et à droite de g coïncident), dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $g' : x \mapsto \begin{cases} 2(x-1) \text{ si } x < 1, \\ 3(x-1)^2 \text{ si } x < 1. \end{cases}$ Donc $g'(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$, donc, par le théorème de la limite de la dérivée, g est dérivable en 1 de dérivée égale à 0.
3. h est dérivable en tout réel non nul par les théorèmes généraux. Montrons qu'elle est dérivable en 0 : pour tout x réel, $\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0} = |x| \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc h est dérivable en 0.
4. k est dérivable en tout réel différent de 0 et 1 par les théorèmes généraux.
Étude en 0**.** Pour tout réel x,
$$\frac{k(x)-k(0)}{x-0} = \frac{\frac{|x|}{1+|x-1|}}{x} = \frac{\operatorname{sgn}(x)}{1+|x-1|},$$
n'a pas de limite quand x tend vers 0. Donc k n'est pas dérivable en 0.
Étude en 1**.** Pour tout réel x,
$$\frac{k(x)-k(1)}{x-1} = \frac{\frac{|x|}{1+|x-1|}-1}{x-1} = \frac{|x|-1-|x-1|}{(1+|x-1|)(x-1)}.$$
Si $x > 1$,
$$\frac{|x|-1-|x-1|}{(1+|x-1|)(x-1)} = \frac{x-1-(x-1)}{(1+x-1)(x-1)} = 0.$$
Si $0 < x < 1$,
$$\frac{|x|-1-|x-1|}{(1+|x-1|)(x-1)} = \frac{x-1-(1-x)}{(1+1-x|)(x-1)} = \frac{2}{2-x},$$
donc $\dfrac{k(x)-k(1)}{x-1}$ n'admet pas les mêmes limites à gauche et à droite en 1, donc k n'est pas dérivable en 1.

Exercice 11. ●◐○

1. À quelle condition la valeur absolue d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est-elle dérivable ?

Correction

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrons que $|f|$ est dérivable si et seulement si

$$\forall a \in \mathbb{R},\ f(a) = 0 \Rightarrow f'(a) = 0.$$

On montre le sens réciproque :
Soit $a \in \mathbb{R}$.
Déjà, si a est dans $\mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq 0$, comme f est dérivable, elle est continue et on dispose de $\eta > 0$ tel que f ne s'annule pas et reste de signe constant sur $[a-\eta, a+\eta]$. Donc sur cet intervalle, f est du signe de $f(a)$. Si $f(a) > 0$, $\forall x \in [a-\eta, a+\eta], |f(x)| = f(x)$, dérivable, donc dérivable en a. Si $f(a) < 0$, $\forall x \in [a-\eta, a+\eta], |f(x)| = -f(x)$, dérivable, donc dérivable en a.
Maintenant, si $f(a) = 0$, alors $f'(a) = 0$, donc on dispose de ε qui tend vers 0 quand x tend vers a telle que pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$f(x) = 0 + 0 \times (x-a) + \varepsilon(x) \times (x-a),$$

donc $|f(x)| = |\varepsilon(x)||x-a| = (x-a)|\varepsilon(x)||\eta(x)|$, avec $\eta(x) = 1$ si $x - a > 0$ et -1 si $x - a < 0$. Donc $|\varepsilon(x)||\eta(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, donc $|f|$ est dérivable en a de dérivée nulle !
Sens direct : on montre la contraposée :
Supposons que $|f|$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit a tel que $f(a) = 0$. Comme $|f|$ est toujours positive, a est alors un minimum local de $|f|$ atteint à l'intérieur de l'intervalle considéré (on s'est placé sur $\mathbb{R}$), donc $|f|'(a) = 0$. On dispose alors de $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ et que pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$|f(x)| = (x-a)\varepsilon(x).$$

Mais alors si on prend η la fonction égale au signe de f (et nulle quand f est nulle), on a pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) = (x-a)\varepsilon(x)\eta(x)$, avec, comme η est bornée, $\varepsilon(x)\eta(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$. Donc $f'(a) = 0$. D'où le résultat !

2. À quelle condition le maximum de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est-il dérivable ?

Correction

Soient f et g deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors $\max(f,g) = \dfrac{f+g+|f-g|}{2}$, donc $\max(f,g)$ est dérivable ssi $|f-g|$ est dérivable, donc ssi

$$\forall a \in \mathbb{R},\ f(a) = g(a) \Rightarrow f'(a) = g'(a).$$

Exercice 12. ●●○ Soit f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et représenter le graphe de f.

Correction

On remarque que si on pose $g : x \mapsto \begin{cases} e^{\frac{1}{2(x-1)}} & \text{si } x < 1, \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$ et $h : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{2(x+1)}} & \text{si } x > -1, \\ 0 & \text{si } x \leqslant -1. \end{cases}$, alors $f = gh$. Or on a démontré en cours, par récurrence, le caractère $\mathscr{C}^\infty$ de $k : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } > 0, \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$, d'où celui de g et h et celui de f. On obtient une fonction $\mathscr{C}^\infty$ à support inclus dans un segment (i.e. nulle en-dehors de $[0, 1]$)

Exercice 13. ●●◐ Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(0) = 0$.
Montrer qu'il existe une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x positif on ait $f(x) = g\left(x^2\right)$.

Exercice 14. ●●○ Soit, pour λ et μ dans $\mathbb{R}$, $\varphi_{\lambda,\mu} : x \mapsto e^x + \lambda e^{-x} + \mu x$. Déterminer une CNS sur λ et μ pour que $\varphi_{\lambda,\mu}$ soit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ dont la bijection réciproque est $\mathcal{C}^1$.

Exercice 15. ●●◐

1. Soit f dérivable en 0. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$. existe et la déterminer (on reviendra à la définition de la dérivabilité en termes de développement limité).

Correction

f est dérivable en 0 donc on dispose d'une fonction ε tendant vers 0 en 0 et d'un voisinage V de 0 tels que

$$\forall x \in V,\ f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon(x).$$

Or, pour tout k dans $\{0, \dots, n\}$, $\frac{k}{n^2} \leqslant \frac{1}{n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, pour n assez grand, $0, \frac{1}{n^2}, \dots, \frac{1}{n}$ sont dans V. Donc

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \sum_{k=0}^{n} \left[f(0) + f'(0)\left(\frac{k}{n^2}\right)\left(1 + \varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)\right)\right]$$

On va supposer ici $f(0) = 0$ (sinon la limite sera infinie). Donc

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f'(0)\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}\left(1 + \varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)\right).$$

Nommons ε_n le maximum de $|\varepsilon|$ sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$. Afin de manipuler les inégalités, supposons $f'(0) \geqslant 0$. On en déduit que

$$f'(0)\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}(1 - \varepsilon_n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leqslant f'(0)\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}(1 + \varepsilon_n),$$

i.e.

$$f'(0)\frac{n(n+1)}{2n^2}(1 - \varepsilon_n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leqslant f'(0)\frac{n(n+1)}{2n^2}(1 + \varepsilon_n),$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit, par encadrement, que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ converge vers $\dfrac{f'(0)}{2}$.

2. Application : montrer que $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

Correction

Posons $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$ et $S_n = \ln(P_n)$. Alors $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$. Donc S_n converge vers la dérivée en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$, i.e. vers $\dfrac{1}{2}$.

3 Théorèmes globaux

3.1 Théorème de Rolle

Exercice 16. ●◐○ Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour toute $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, si f est n fois dérivable sur $[0,1]$ et si f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[0,1]$, alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $[0,1]$.

Correction

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Soit f dérivable n fois sur $[0,1]$, $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ les points d'annulation de f. On montre par récurrence sur $k \leqslant n$ que $f^{(k)}$ s'annule $n+1-k$ fois sur $[0,1]$.
L'initialisation est donnée par l'exercice.
Hérédité. On suppose que $f^{(k)}$ s'annule $n+1-k$ fois sur $[0,1]$ pour un certain $k \leqslant n-1$. Soient $b_0 < \cdots < b_{n-k}$ ces points d'annulation. Alors pour tout i dans $[\![0, n-k-1]\!]$, $f^{(k)}$ est continue sur $[b_i, b_{i+1}]$, dérivable sur $]b_i, b_{i+1}[$ et $f^{(k)}(b_i) = f^{(k)}(b_{i+1})$ donc, d'après le théorème de Rolle, on dispose de c_i dans $]b_i, b_{i+1}[$ tel que $f^{(k+1)}(c_i)$ s'annule. On a donc trouvé $n+1-(k+1)$ points $b_0 < c_0 < b_1 < \cdots < c_{n-k-1} < b_{n-k}$ d'annulation de $f^{(k+1)}$.
D'où l'hérédité et le résultat par récurrence, en particulier pour $k = n$.

Exercice 17. ●●○
Soit P un polynôme. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions sur $\mathbb{R}$.

Correction

Soit n le degré de P. Supposons que $f : x \mapsto e^x - P(x)$ s'annule au moins $n+2$ fois sur $\mathbb{R}$. Alors, par l'exercice 16, la dérivée $n+1$-ième de f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$. Or la dérivée $n+1$-ième de P est nulle, donc $x \mapsto e^x$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$, c'est absurde. Donc l'équation admet au plus $n+2$ solutions (en particulier c'est un nombre fini).

Exercice 18. ●●○ Soient a et b deux réels, n un entier supérieur ou égal à 2. On considère $P : x \mapsto x^n + ax + b$.

1. Montrer que P s'annule au plus 3 fois sur $\mathbb{R}$.

Correction

Posons k le nombre de zéros de P. Alors, comme P est continu donc dérivable sur $\mathbb{R}$, par le théorème de Rolle appliqué entre chacune des racines de P, P' s'annule $k-1$ fois. De même, P'' s'annule $k-2$ fois sur $\mathbb{R}$, i.e. $xn(n-1) \mapsto x^{n-2}$ d'annule $k-2$ fois sur $\mathbb{R}$. Or $x \mapsto x^{n-2}$ s'annule au plus 1 fois sur $\mathbb{R}$, donc $k-2 \leqslant 1$, donc $k \leqslant 3$. D'où le résultat.

2. Montrer que si n est pair, P s'annule au plus 2 fois sur $\mathbb{R}$.

Correction

Si de plus n est pair, nommons toujours k le nombre de zéros de P. Alors par les mêmes arguments que précédemment, P' s'annule $k-1$ fois sur $\mathbb{R}$, i.e. $x \mapsto nx^{n-1} + a$ s'annule $k-1$ fois sur $\mathbb{R}$. Comme n est pair, $n-1$ est impair donc $x \mapsto nx^{n-1} + a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$. Donc $k-1 \leqslant 1$, donc $k \leqslant 2$.

Exercice 19. ●●○ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, dérivable, telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $\exists a > 0, f(a) = 0$. Montrer qu'il existe un point de la courbe de f, différent de l'origine, où la tangente passe par l'origine du repère.

Correction

Traduisons analytiquement la condition géométrique décrite. Soit c dans $\mathbb{R}_+$. L'équation de la tangente à la courbe de f en c est $y = f(c) + f'(c)(x-c)$. Demander à ce que cette droite passe par 0, c'est demander que $0 = f(c) - cf'(c) = c\left(\frac{f(c)}{c} - f'(c)\right)$. Cela incite à considérer la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} \text{ si } x \neq 0, \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 0$, donc g est continue en 0. Donc g est continue sur $[0, a]$, dérivable sur $]0, a[$, et $g(0) = 0$, $g(a) = 0$. Donc d'après le théorème de Rolle, g s'annule en un point c de $]0, a[$. Or,

$$g'(c) = \frac{f'(c)c - f(c)}{c^2},$$

donc $f'(c)x - f(c) = 0$, ce qui correspond exactement à la condition trouvée ! D'où le résultat.

Exercice 20. ●●● Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et bornée.

1. Montrer que si une dérivée $f^{(k)}$ admet un nombre fini de zéros, alors les dérivées précédentes $f^{(p)}$, $1 \leqslant p < k$ tendent vers 0 en $\pm\infty$.
2. Rappeler le théorème de Rolle à l'infini.
3. En déduire que, pour $k \geqslant 2$, $f^{(k)}$ s'annule au moins $k-1$ fois.

3.2 Théorème et inégalité des accroissements finis

Exercice 21. ●○○

Montrer les inégalités suivantes

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(y)| \leqslant |x-y|$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \leqslant e^x - 1 \leqslant xe^x$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \text{ch}(x) - 1 \leqslant x\text{sh}(x)$

Correction

1. Soit $f : x \mapsto \text{Arctan}(x)$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. En particulier, pour tout x de $\mathbb{R}$, $|f'(x)| \leqslant 1$, donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous x et y dans $\mathbb{R}$, $|\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(y)| \leqslant |x-y|$.
2. On pose $f : x \mapsto e^x$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit x dans $\mathbb{R}_+^*$. En appliquant le théorème des accroissements finis entre 0 et x, on dispose de c dans $]0,x[$ tel que $e^x - 1 = f'(c)(x-0) = e^c x$. Or, $0 \leqslant x \leqslant c$ donc $1 \leqslant e^c \leqslant e^x$, donc
$$x \leqslant e^x - 1 \leqslant xe^x.$$
3. Soit x un réel positif. La fonction ch est continue sur $[0,x]$, dérivable sur $]0,x[$, de dérivée égale à sh, donc, d'après le théorème des accroissements finis, on dispose de c dans $]0,x[$ tel que
$$\text{ch}(x) - 1 = \text{sh}(c)x.$$
Si $x \geqslant 0$, $0 \leqslant \text{sh}(c) \leqslant \text{sh}(x)$, donc, comme $x \geqslant 0$, $0 \leqslant x\text{sh}(c) \leqslant x\text{sh}(x)$, donc $0 \leqslant \text{ch}(x) - 1 \leqslant x\text{sh}(x)$.
Si $x \leqslant 0$, $x \leqslant \text{sh}(c) \leqslant 0$, donc, comme $x \leqslant 0$, $0 \leqslant x\text{sh}(c) \leqslant x\text{sh}(x)$, donc $0 \leqslant \text{ch}(x) - 1 \leqslant x\text{sh}(x)$.
D'où le résultat.

Exercice 22. *Série harmonique – le retour*. ●○○ En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$
En déduire (pour la $n+1$-ième fois) que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$, et déterminer, si elle existe, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Appliquons le théorème des accroissements finis entre x et $x+1$: on dispose de $c_x \in]x, x+1[$ tel que $\ln(x+1) - \ln(x) = \frac{1}{c_x}$ (la dérivée de ln en c_x). Or, $x \leqslant c_x \leqslant x+1$ donc $\frac{1}{x+1} \leqslant \frac{1}{c_x} \leqslant \frac{1}{x}$, donc $\frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}$. Donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$

$+\infty$ d'où le résultat !

Exercice 23. ●◐○ Soit f une fonction dérivable d'un segment $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(a)=f(b)$ et que $f'(a)=0$. Montrer qu'il existe c dans $]a,b[$ tel que

$$f'(c)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

(comme dans la plupart des démonstrations du cours, on choisira une fonction auxiliaire adéquate)

Correction

Ici, on ne peut pas directement appliquer le théorème des accroissements finis ! Considérons la fonction

$$g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ si } x\neq a, \\ 0 \text{ si } x=a. \end{cases}$$

Alors $\lim\limits_{x\to a} g(x)=f'(a)=0$, donc g est définie et continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et $g(a)=0$, $g(b)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$. Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe c dans $]a,b[$ tel que $g'(c)=0$. Or, pour tout x dans $]a,b]$,

$$g'(x)=\frac{f'(x)(x-a)-(f(x)-f(a))}{(x-a)^2}.$$

Donc

$$\frac{f'(c)(c-a)-(f(c)-f(a))}{(x-a)^2}=0,$$

i.e.

$$f'(c)(c-a)=f(c)-f(a),$$

donc, comme $c\neq a$,

$$f'(c)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

D'où le résultat.

4 Autres exercices

Exercice 24. *Vers de l'analyse un peu fine.* ●●○

Soit f une fonction continûment dérivable de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\begin{cases} f(0)=0, \\ f'(0)=1, \\ f(1)<0. \end{cases}$

On veut montrer qu'il existe un « premier temps de retour à 0 », c'est-à-dire qu'il existe un réel a de $[0,1]$ tel que

$$f(a)=0 \text{ et } \forall 0<x<a,\ f(x)\neq 0.$$

1. Montrer qu'il existe un réel δ tel que $\forall x\in]0,\delta[,\ f(x)>0$.

Correction

f est dérivable en 0 de dérivée égale à 1, donc on dispose d'une fonction ε définie au voisinage de 0, V, tendant vers 0 en 0, telle que

$$\forall x \in V, f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon(x) = x(1 + \varepsilon(x)).$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, on dispose de $\delta_0 > 0$ tel que pour tout $x \in]0, \delta_0[$, $|\varepsilon(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Pour x dans $]0, \delta_0[$, on a alors $1 + \varepsilon(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$, donc $x(1 + \varepsilon(x)) \geqslant \dfrac{x}{2} > 0$, i.e. $f(x) > 0$.

2. Considérons alors l'ensemble $A = \{\delta \in]0, 1[, \forall x \in]0, \delta[,\ f(x) > 0\}$.

(a) Justifier que A a une borne supérieure, appelons-là a.

Correction

L'ensemble A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (il contient δ_0), majorée. Donc A admet une borne supérieure.

(b) Montrer que $f(a) = 0$.

Correction

Déjà, $f(1) < 0$ donc nécessairement $a \neq 1$.
Si $f(a) \neq 0$, supposons $f(a) > 0$. f est continue en a donc il on dispose de $\eta > 0$ tel que pour tout x de $]a - \eta, a + \eta[$, $f(x) > 0$. Donc $a + \dfrac{\eta}{2} \in A$, c'est absurde.
Donc $f(a) = 0$.

(c) Montrer que $\forall x \in]0, a[,\ f(x) > 0$, et conclure.

Correction

Soit $x \in]0, a[$. Posons $\varepsilon = a - x > 0$. Alors par les propriétés de la borne supérieure, on dispose d'un élément δ de A tel que $a - \delta < \varepsilon$, i.e. $x < \delta < a$. Donc, par définition de δ, $f(x) > 0$.
On en déduit que $f(a) = 0$ et que $\forall x \in]0, a[$, $f(x) > 0$.

Exercice 25. ●●◐ Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, dérivable. On définit

$$\Phi : \left| \begin{array}{l} [a, b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{et } \Psi : \left| \begin{array}{l} [a, b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} & \text{si } x \neq b \\ f'(b) & \text{si } x = b \end{cases} \end{array} \right.$$

1. En étudiant les fonctions Φ et Ψ, montrer que f' prend toutes les valeurs du segment d'extrémités $f'(a)$ et $f'(b)$.
Ainsi, f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

Correction

Premier point, Φ et Ψ sont clairement continues sur $[a, b]$ par définition de la dérivabilité de f.
Ensuite, on peut supposer, sans perte de généralité, $f'(a) < f'(b)$.
Soit alors M dans $]f'(a), f'(b)[$ (on peut prendre le segment ouvert car sinon c'est évident !).
On sait que $\Phi(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a) < M$ donc on dispose de $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a, a+\eta]$, $\Phi(x) < M$.
On sait que $\Psi(x) \underset{x\to b}{\longrightarrow} f'(b) > M$ donc on dispose de $\eta' > 0$ tel que $\forall x \in [b-\eta', b]$, $\Psi(x) > M$.
Ensuite, M se situe entre $\Phi(a+\eta)$ et $\Psi(b-\eta')$. De plus, $\Phi(b) = \Psi(a) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Donc, nécessairement, M est ou supérieur ou inférieur à cette quantité, i.e.

- ou bien $\Phi(a+\eta) < M \leqslant \Phi(b)$
- ou bien $\Psi(a) \leqslant M < \Psi(b-\eta)$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que l'on est dans la première situation. Alors par continuité de Φ et par le théorème des valeurs intermédiaires, on dispose de α dans $[a+\eta, b]$ tel que $M = \Phi(\alpha)$, i.e. $M = \dfrac{f(\alpha)-f(a)}{\alpha-a}$. Maintenant, par le théorème des accroissements finis, on dispose de c dans $]a, \alpha[$ tel que $\dfrac{f(\alpha)-f(a)}{\alpha-a} = f'(c)$, i.e. $M = f'(c)$. Le résultat est donc démontré !

2. Pourquoi ne peut-on pas appliquer le TVI sur f' ?

Correction

Simplement parce que f n'est que dérivable : rien ne nous dit que f' est continue !

Indications.

6 Calculs directs. Ne pas hésiter, quand il y a une dérivée compliquée, à l'écrire sous la forme $f \circ g \circ h$ et à expliciter sa dérivée à l'aide de la règle de la chaîne.

7 **1.** Récurrence évidente.

2. Utiliser la formule de Leibniz$g : x \mapsto xe^x$

3. Essayer d'exprimer h simplement, en écrivant $x^2+1 = 2+x^2-1$, puis en écrivant $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$ avec a et b à déterminer.

8 **ATTENTION !** La tangente commune n'est pas tangente aux deux courbes **au même point**. Un conseil : écrire l'équation de la tangente à la courbe de $x \mapsto x^2$ en $a \in \mathbb{R}$ et l'équation de la tangente à la courbe de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ en $b \in \mathbb{R}^*$, puis égaliser les deux équations de tangentes.

9 Écrire les définitions, et dériver les égalités en faisant attention aux foncitons composées.

10 Utiliser les théorèmes généraux pour toutes les fonctions non problématiques, puis utiliser le théorème de la limite de la dérivée ou bien le taux de variations.

11
  1. Montrer que $|f|$ est dérivable si et seulement si $\forall a \in \mathbb{R},\ f(a) = 0 \Rightarrow f'(a) = 0$. (en montrant la réciproque, puis la contraposée du sens direct)
  2. Utiliser les expressions du maximum et du minimum à l'aide de la valeur absolue !

12 Remarquer que $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+x}$ et utiliser l'exercice 1.

15 Utiliser la seconde définition de la dérivabilité ($f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon(x)$) puis injecter cette expression dans la somme. Ensuite, séparer les cas $f(0) \neq 0$ et $f(0) = 0$, puis, dans le cas $f(0) = 0$, revenir aux ε.

13 Écrire ce que l'on veut avoir (« $g(x) = f(\sqrt{x})$ ») et utiliser le théorème de prolongement de la classe $\mathscr{C}^1$.

14 Penser aux conditions pour être une bijection (en termes de monotonie) et aux conditions pour avoir la dérivabilité de la réciproque !

16 Appliquer n fois le théorème de Rolle (fait en cours).

17 Utiliser Rolle plusieurs fois et penser qu'à partir d'un certain n, $P^{(n)}$ est nul.

18
  1. Si ce n'est pas le cas, appliquer plusieurs fois le théorème de Rolle.
  2. Utiliser que si n est pair, alors la dérivée de la fonction s'annule au moins une fois.

19 Démontrer que cela revient à avoir l'existence d'un c tel que $0 = f(c) - cf'(c)$, i.e. $c\left(\dfrac{f(c)}{c} - f'(c)\right) = 0$, et appliquer le théorème de Rolle à une fonction bien choisie.

20 Penser au fait que si f^k a un nombre fini de zéros, après son dernier zéro elle est de signe constant, donc $f^{(k-1)}$ est monotone...

21 Il s'agit uniquement d'applications du théorème ou de l'inégalité des accroissements finis.

22 Essayer d'encadrer $\ln(x+1) - \ln(x)$ sur $[n, n+1]$ à l'aide du théorème des accroissements finis.

23 Ressemble beaucoup à 19... Introduire $g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ si } x \neq a, \\ 0 \text{ si } x = a. \end{cases}$

24
  1. Utiliser la seconde définition de la dérivée.
  2. (a)
     (b) Montrer que $a \neq 1$, puis raisonner par l'absurde en supposant $f(a) \neq 0$.
     (c) Utiliser la caractérisation de la borne supérieure.

25 Prendre M entre $f'(a)$ et $f'(b)$ et encadrer M entre une valeur de Φ et une valeur de Ψ. Pour cela, penser que si $\Phi(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell < \alpha$, alors $\Phi(x) < \alpha$ au voisinage de a. Ensuite appliquer le TVI à Φ ou à Ψ.