TD 13
Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. ●○○ Étudier la suite suivante : $\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}. \end{cases}$

Correction

On a une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f : x \mapsto \sqrt{x+3}$. f est croissante, $u_1 = 2 > u_0$ donc (u_n) est croissante. Par récurrence évidente, $u_n \geqslant 0\ \forall n$.
f est continue. Cherchons donc ses éventuels points fixes. Un réel a est point fixe de f ssi $a = f(a)$, i.e. $a^2 - a - 3 = 0$, i.e. $a = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$. L'unique point fixe positif est $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.
De plus, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}} < 1$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Donc f est contractante. Donc (u_n) converge vers l'unique point fixe de f.
Autre argument : (u_n) est croissante, majorée par α (on le montre par récurrence).

Exercice 2. *Approximation de $\sqrt{a}$.* ●●○ Soit $a > 0$ et (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 > 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) \end{cases}$$

1. Étude de la convergence de (u_n)

(a) Démontrer que u_n est bien définie pour tout n et, si elle converge, son éventuelle limite.

Correction

Déjà, on démontre par récurrence immédiate que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n > 0$.
Ensuite, si $u_n \underset{\ell \to \in}{\longrightarrow} \mathbb{R}$, alors $\ell \neq 0$ car si $\ell = 0$, $\dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui est impossible. Donc $\ell \neq 0$ et $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{a}{\ell}\right)$, donc $\ell = \dfrac{a}{\ell}$ donc $\ell^2 = a$ donc $\ell = \sqrt{a}$.

(b) Démontrer que $u_n \to \sqrt{a}$ et que la convergence est géométrique. *On étudiera $u_{n+1} - \sqrt{a}$ et on remarquera que pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n} \leqslant 1$.*

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{u_n^2 + a - 2\sqrt{a}u_n}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}$$

Or, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n > 0$ et on vient de démontrer que si $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \sqrt{a} = \dfrac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n} \geqslant 0$. Donc, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\sqrt{a} \leqslant u_n$ donc $u_n - \sqrt{a} \geqslant 0$. De plus $u_n - \sqrt{a} \leqslant u_n$ donc, en divisant par u_n, $\dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n} \leqslant 1$. Donc

$$0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{a}),$$

d'où, comme vu en cours, une convergence sous-géométrique !

2. **Détermination de la vitesse de convergence.** On va démontrer que la convergence est bien meilleure qu'une convergence géométrique. On définit, pour tout entier naturel n,

$$\varepsilon_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}.$$

Déterminer une expression simple de ε_n en fonction de ε_0.

Correction

Soit n dans $\mathbb{N}$. Essayons d'exprimer ε_{n+1} en fonction de ε_n :

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}}.$$

Or, par la question précédente, on a vu que

$$u_{n+1} - \alpha = \frac{(u_n - \alpha)^2}{2u_n},$$

où $\alpha = \sqrt{a}$. De même,

$$u_{n+1} + \alpha = \frac{(u_n + \alpha)^2}{2u_n},$$

donc

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\frac{(u_n-\alpha)^2}{2u_n}}{\frac{(u_n+\alpha)^2}{2u_n}} = \left(\frac{u_n - \alpha}{u_n + \alpha}\right) = \varepsilon_n^2.$$

On en déduit, par une récurrence évidente, que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_n = \varepsilon_0^{2^n}.$$

3. Montrer que $|\varepsilon_0| < 1$, et montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\left| u_n - \sqrt{a} \right| \leqslant 2u_0.|\varepsilon_0|^{2^n}$$

Il s'agit d'une convergence très rapide de u_n vers $\sqrt{a}$.

Correction

On a $\varepsilon_0 = \dfrac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}$. Si $u_0 \geqslant \sqrt{a}$, on a $0 \leqslant u_0 - \sqrt{a} < u_0 + \sqrt{a}$, donc $0 \leqslant |\varepsilon_0| < 1$. De même si $u_0 \leqslant \sqrt{a}$.
Ensuite, on peut écrire que pour tout entier naturel n,

$$|u_n - \alpha| \leqslant \varepsilon_n |u_n + \alpha|$$

Or, si $u_0 \geqslant \sqrt{a}$, $u_1 \leqslant u_0$, donc, par croissance de f sur $[\sqrt{a}, +\infty[$, (u_n) est décroissante. Donc $u_n + \alpha \leqslant 2u_0$, et le résultat est alors démontré :

$$|u_n - \alpha| \leqslant \varepsilon_0^{2^n} 2u_0.$$

4. Application : donner **sans calculatrice** une approximation de $\sqrt{2}$ par un rationnel à 10^{-3} près.

Correction

Ici, $a = 2$. Prenons $u_0 = 2$. Alors $\varepsilon_0 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \leqslant \dfrac{1}{6}$. Donc

$$|u_n - \sqrt{2}| \leqslant 4.\frac{1}{6^{2^n}}.$$

Or, $6^2 = 36$, $6^4 = 1296$, donc $\dfrac{4}{6^{16}} < 10^{-3}$. Donc u_3 est une approximation de $\sqrt{2}$ par des rationnels à 10^{-3} près. On calcule :

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{3}{2},$$
$$u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12}$$
$$u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right) = \frac{577}{408}$$

2 Exercices à chercher en TD

Exercice 3. ●●○ Étudier les suites suivantes

1. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_{n+1} = u_n^2 + 1. \end{cases}$

Correction

(u_n) est définie par rla relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f : x \mapsto 1 + x^2$, strictement croissante. De plus, $u_1 = 1 + u_0^2 \geqslant u_0$. Donc (u_n) est croissante.
Ensuite, on montre par récurrence évidente que pour tout entier n, $u_n \geqslant n$. Donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2}, \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{2}. \end{cases}$

Correction

On a une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f : x \mapsto \dfrac{x^2+x}{2}$. On a alors $f'(x) = x + \dfrac{1}{2}$. On remarque que $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$, et $u_0 \in \mathbb{R}_+$, donc par récurrence évidente, pour tout n, $u_n \in \mathbb{R}_+$.
Or, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc, comme $u_1 = \dfrac{3}{8} < u_0$, (u_n) est décroissante. Minorée par 0, elle converge vers un point fixe de f. Un point fixe de f est solution de $x = \dfrac{x^2+x}{2}$, i.e. $2x = x^2 + x$, i.e. $x(x-1) = 0$, i.e. $x = 1$ ou $x = 0$. Comme pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$, u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n}. \end{cases}$

Correction

$x \mapsto \mathrm{e}^x$ est croissante, $u_1 \geqslant u_0$ donc (u_n) est croissante. On montre que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n-1$ donc u_n tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$.

4. $\begin{cases} u_0 > 0,\ \ u_1 > 0, \\ u_{n+2}u_n = u_{n+1}^2. \end{cases}$

Correction

On montre par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$. Si on pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, on a, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n$ donc (v_n) est constante, égale à $C = \dfrac{u_1}{u_0}$. Donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = Cu_n$. Donc (u_n) est géométrique de raison C.

Exercice 4. *Une suite récurrente plus coriace !*. ●●◐ Étudier la suite $\begin{cases} u_0 = \alpha \in [0,1], \\ u_{n+1} = (1-u_n)\sin(u_n). \end{cases}$

Correction

On a une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. On montre facilement, par récurrence, que $u_n \in [0,1]$ pour tout n. Cependant, on ne peut pas montrer que f est contractante ! (ce n'est pas vrai). On va donc étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit n dans $\mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = (1-u_n)\sin(u_n) - u_n.$$

On étudie alors $g : x \mapsto (1-x)\sin(x) - x$. g est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout x de $[0,1]$, $g'(x) = -\sin(x) + (1-x)\cos(x) - 1$. g' est dérivable et pour tout x de $[0,1]$, $g''(x) = -\cos(x) - \cos(x) - (1-x)\sin(x) < 0$ donc g' est décroissante et nulle en 0, donc g' est négative donc g est décroissante et nulle en 0 donc g est négative sur $[0,1]$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Minorée par 0, elle converge, vers un point fixe de f. Or, comme $x \mapsto f(x) - x$ est strictement décroissante, on en déduit que 0 est le seul point fixe de f, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Exercice 5. *Vraiment une suite récurrente ?*. ●●○

On définit une suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_0 + u_1 + \cdots + u_n} \end{cases}$

1. Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Correction

Déjà, il est clair que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.
Ensuite, on a l'impression qu'ici on est hors du cadre du cours. Essayons d'écrire la relation de récurrence comme une vraie relation $u_{n+1} = f(u_n)$. On remarque que si $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{u_0 + u_1 + \cdots + u_n} = \sqrt{u_0 + \cdots + u_{n-1} + u_n} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{u_0 + \cdots + u_{n-1}}\right)^2 + u_n} = \sqrt{u_n^2 + u_n}. \end{aligned}$$

Donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ (attention, ici il faut partir de 1) est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto \sqrt{x + x^2}$. On remarque que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions croissantes. Regardons alors le signe de la première différence : $u_2 - u_1 = \sqrt{u_0 + \sqrt{u_0}} - \sqrt{u_0} \geqslant 0$. Donc (u_n) est croissante. Donc elle possède une limite, éventuellement infinie, en $+\infty$.
Pour mieux étudier la convergence, étudions les points fixes de f. L'équation $f(x) = x$ s'écrit $x = \sqrt{x^2 + x}$, donc $x = 0$. Donc 0 est l'unique point fixe de f. Croissante et positive, (u_n) ne peut tendre vers 0 en $+\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. Déterminer la limite de $u_{n+1} - u_n$.

Correction

On veut étudier $u_{n+1} - u_n$. On sait que

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n &= \frac{(\sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n)(\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n)}{\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n} \\ &= \frac{u_n^2 + u_n - u_n^2}{\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)} + u_n} \\ &= \frac{u_n}{u_n\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} + u_n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} + 1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exercice 6. *Une étude de suite récurrente avec une étude de fonction poussée.* ●●○ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$.

1. Montrer que $]0,1]$ est stable par f.

Correction

Pour tout x strictment positif, $\ln(1+x) \leqslant x$ (par l'inégalité des accroissements finis par exemple). Donc $\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} \leqslant \sqrt{x}$. Donc pour tout x de $]0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1$. Donc $f(]0,1]) \subset]0,1]$.

2. Montrer que f est croissante sur $]0,1]$.

Correction

Dérivons f :

$$\forall x \in]0,1],\ f'(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x} - \frac{\ln(1+x)}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x}}\left(\frac{x}{1+x} - \frac{1}{2}\ln(1+x)\right).$$

Montrons que pour tout x réel positif, $\dfrac{x}{1+x} - \dfrac{1}{2}\ln(1+x) \geqslant 0$. Posons

$$g : x \mapsto \frac{x}{1+x} - \frac{1}{2}\ln(1+x) = 1 - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\ln(1+x),$$

donc sa dérivée est

$$g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+x} = \frac{2-1-x}{2(1+x)^2} = \frac{1-x}{2(1+x)^2},$$

Donc g est croissante sur $[0,1]$, donc toujours supérieure à $g(0) = 0$, donc f est croissante sur $[0,1]$.

3. Montrer que f admet un unique point fixe sur $]0,1]$.

Correction

On cherche un point fixe de f, i.e. un réel x tel que $f(x) = x$. Or, on remarque que, étant donné que l'étude s'effectue sur $]0,1]$, l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $\varphi(x) = 1$, où $\varphi : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x^{3/2}}$. Étudions les variations de φ :

$$\varphi'(x) = \frac{\frac{2x}{x+1} - 3\ln(x+1)}{2x^{\frac{5}{2}}}.$$

On étudie alors $\psi : x \mapsto \dfrac{2x}{x+1} - 3\ln(x+1)$. $\psi'(x) = \dfrac{-3x-1}{(x+1)^2} < 0$ sur $]0,1]$. Donc ψ est strictement décroissante. Nulle en 0, elle est négative. Donc φ est strictement décroissante. Donc 1 admet au plus un antécédent par φ. Or,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Donc $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = +\infty$, $\varphi(1) = \ln(2) < 1$, et φ est continue sur $]0,1]$. Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, 1 admet un unique antécédent par φ. Donc f admet un unique point fixe.

4. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Correction

f est croissante donc (u_n) est monotone. Or $u_1 = \ln(2) < 1$ donc (u_n) est décroissante, et minorée par 0, donc elle converge. Elle converge donc soit vers 0, soit vers l'unique point fixe α de f dans $]0,1]$. Or, on remarque que comme $f(x) < x$ pour tout x de $]0,\alpha[$ et $f(x) > x$ pour tout x de $]\alpha, 1[$, on a $u_n \geqslant \alpha$ pour tout entier naturel n. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Exercice 7. *Points fixes attractifs, répulsifs*. ●●◐
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, $a \in I$ un point fixe de f. On dit que a est un point fixe *attractif* de f si $|f'(a)| < 1$; on dit qu'il est *répulsif* si $|f'(a)| > 1$.

1. Supposons que a est un point fixe attractif de f. Montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que pour tout x de V, la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = x, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n), \end{cases}$ converge vers a.

Correction

On sait que $|f'(a)| < 1$, donc il existe un voisinage V (on peut même supposer qu'il s'agit d'un intervalle) de a tel que $\forall x \in V$, $|f'(x)| < 1$. Donc f est contractante sur l'intervalle V. Donc, par le cours, la suite (u_n) converge vers a pour tout x de V.

2. Supposons que a est un point fixe répulsif de f. Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, suite convergeant vers a. Montrer que (u_n) est stationnaire apcr, c'est-à-dire qu'il existe un entier N tel que $\forall n \geqslant N, u_n = a$.

Correction

Soit $C \in]f'(a), 1[$. Soit V un voisinage de a tel que $\forall x \in V$, $|f'(x)| \geqslant C > 1$. Comme on a supposé (u_n) convergeant vers a, on dispose de N dans $\mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $u_n \in V$. Posons alors $v_n = u_{n+1} - u_n$. Alors $v_{N+1} = f(u_{N+1}) - f(u_N)$. Par le théorème des accroissements finis, on dispose de c_N entre u_N et u_{N+1} tel que $v_{N+1} = f'(c_N)v_N$. Donc

$$|v_{N+1}| = |f'(c_N)||v_N| \geqslant C|v_N|.$$

Donc pour tout $p \geqslant N$, $|v_p| \geqslant C^{p-N}|v_N|$, suite qui tend vers $+\infty$ sauf si $v_N = 0$. Donc, comme $v_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$, $v_N = 0$, donc, par récurrence évidente, $v_n = 0 \forall n \geqslant N$. Donc u_n est stationnaire à partir de N.

Exercice 8. ●●● Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 \left\lfloor \frac{1}{u_n} \right\rfloor$.

1. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction

Par récurrence immédiate, $u_n \geqslant 0$ pour tout n. Puis pour tout n, $\left\lfloor \dfrac{1}{u_n} \right\rfloor \leqslant \dfrac{1}{u_n}$ donc $u_{n+1} \leqslant u_n$, donc (u_n) est décroissante.

2. Démontrer que ou bien $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ou bien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. (et que ce « ou » est exclusif)

Correction

Par l'absurde, on suppose que (u_n) converge vers un réel ℓ non nul sans être stationnaire. Dans ce cas, on montre que ℓ est l'inverse d'un entier. En effet, si ce n'était pas le cas, $\dfrac{1}{u_n}$ convergerait vers $\dfrac{1}{\ell} \notin \mathbb{N}$, point en lequel $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est **continue**, donc $\ell = \ell^2 \left\lfloor \dfrac{1}{\ell} \right\rfloor$, donc $\dfrac{1}{\ell} = \left\lfloor \dfrac{1}{\ell} \right\rfloor$ donc $\dfrac{1}{\ell} = K \in \mathbb{N}$, absurde ! Donc ℓ est l'inverse d'un entier.

Comme (u_n) n'est pas stationnaire, $\dfrac{1}{u_n}$ n'est jamais entier : en effet, si c'était le cas, on aurait pour un certain n, $u_{n+1} = u_n$ et, par récurrence immédiate (u_n) serait stationnaire. On en déduit, comme (u_n) est décroissante, qu'àpcr, $\dfrac{1}{K} < u_n < \dfrac{1}{K-1}$. Mais, à partir de ce rang, on a $K-1 < \dfrac{1}{u_n} < K$, donc $\left\lfloor \dfrac{1}{u_n} \right\rfloor = K-1$. Donc à partir de ce rang, on a $u_{n+1} = u_n^2(K-1)$. Donc $\ell = \ell^2(K-1)$ donc $\ell = \dfrac{1}{K-1}$, absurde !
Donc soit (u_n) converge vers un réel non nul, soit (u_n) est stationnaire.