N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

TD 13
Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. ●○○ Étudier la suite suivante : $\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}. \end{cases}$

Exercice 2. *Approximation de $\sqrt{a}$.* ●●○ Soit $a > 0$ et (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 > 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) \end{cases}$$

1. Étude de la convergence de (u_n)
   (a) Démontrer que u_n est bien définie pour tout n et, si elle converge, son éventuelle limite.
   (b) Démontrer que $u_n \to \sqrt{a}$ et que la convergence est géométrique. *On étudiera $u_{n+1} - \sqrt{a}$ et on remarquera que pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n} \leqslant 1$.*

2. **Détermination de la vitesse de convergence.** On va démontrer que la convergence est bien meilleure qu'une convergence géométrique. On définit, pour tout entier naturel n,

$$\varepsilon_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}.$$

Déterminer une expression simple de ε_n en fonction de ε_0.

3. Montrer que $|\varepsilon_0| < 1$, et montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\left| u_n - \sqrt{a} \right| \leqslant 2u_0.|\varepsilon_0|^{2^n}$$

Il s'agit d'une convergence très rapide de u_n vers $\sqrt{a}$.

4. Application : donner **sans calculatrice** une approximation de $\sqrt{2}$ par un rationnel à 10^{-3} près.

2 Exercices à chercher en TD

Exercice 3. ●●○ Étudier les suites suivantes

1. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_{n+1} = u_n^2 + 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2}, \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{2}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_{n+1} = e^{u_n}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_0 > 0, \ u_1 > 0, \\ u_{n+2} u_n = u_{n+1}^2. \end{cases}$

Exercice 4. *Une suite récurrente plus coriace !*. ●●◐ Étudier la suite $\begin{cases} u_0 = \alpha \in [0,1], \\ u_{n+1} = (1-u_n)\sin(u_n). \end{cases}$

Exercice 5. *Vraiment une suite récurrente ?*. ●●○
On définit une suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_0 + u_1 + \cdots + u_n} \end{cases}$

1. Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.
2. Déterminer la limite de $u_{n+1} - u_n$.

Exercice 6. *Une étude de suite récurrente avec une étude de fonction poussée*. ●●○ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$.

1. Montrer que $]0,1]$ est stable par f.
2. Montrer que f est croissante sur $]0,1]$.
3. Montrer que f admet un unique point fixe sur $]0,1]$.
4. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice 7. *Points fixes attractifs, répulsifs*. ●●◐
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, $a \in I$ un point fixe de f. On dit que a est un point fixe *attractif* de f si $|f'(a)| < 1$; on dit qu'il est *répulsif* si $|f'(a)| > 1$.

1. Supposons que a est un point fixe attractif de f. Montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que pour tout x de V, la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = x, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = f(u_n), \end{cases}$ converge vers a.
2. Supposons que a est un point fixe répulsif de f. Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, suite convergeant vers a. Montrer que (u_n) est stationnaire apcr, c'est-à-dire qu'il existe un entier N tel que $\forall n \geqslant N, u_n = a$.

Exercice 8. ●●● Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = u_n^2 \left\lfloor \dfrac{1}{u_n} \right\rfloor$.

1. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Démontrer que ou bien $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ou bien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. (et que ce « ou » est exclusif)