TD 14
Calcul matriciel et systèmes linéaires

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(M - I_3)(M + 3I_3)$ et en déduire M^{-1}.

Correction

On effectue les calculs :

$$M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \ M + 3I_3 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

d'où

$$(M - I_3)(M + 3I_3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors, en développant le produit, $M^2 - M + 3M - 3I = 0$, i.e. $M^2 = 3I - 2M$. On a $M^2 + 2M = 3I$, donc $\frac{1}{3}M(M + 2I_3) = I_3$, donc M est inversible d'inverse

$$M^{-1} = \frac{1}{3}(M + 2I_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $M^n = u_n M + v_n I_3$. On montrera cette existence par récurrence et on précisera la relation entre (u_{n+1}, v_{n+1}) et (u_n, v_n).

Correction

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « il existe u_n et v_n tel que $M^n = u_n M + v_n I_3$. » Démontrons cette propostion par récurrence.
Initialisation. $M^0 = I_3 = 0 \times M + 1 \times I_3$.
Hérédité. Supposons que u_n et v_n soient construites jusqu'à un certain rang n, avec pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $M^k = u_k M + v_k I_3$. Alors

$$M^{n+1} = M \times M^n = M \times (u_n M + v_n I_3) = u_n M^2 + v_n M = u_n(3I_3 - 2M) + v_n M = (v_n - 2u_n)M + 3u_n I_3.$$

Posons alors $u_{n+1} = v_n - 2u_n$ et $v_{n+1} = 3u_n$.
On a donc construit par récurrence deux suites (u_n) et (v_n) telles que $M^n = u_n M + v_n I_3$,

 nlaillet.math@gmail.com

et on a vérifié que

$$u_0 = 0,\ v_0 = 1,\ \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n \end{cases}$$

3. Déterminer une matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

Correction

On a, d'après les règles du produit matriciel,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

On pose alors $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1}.

Correction

On peut utiliser la formule toute faite ! Mais on peut aussi remarquer que si on calcule P^2, on obtient $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_2$ donc P est inversible, d'inverse

$$P^{-1} = \frac{1}{4}P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. On note $B = P^{-1} \times A \times P$. Calculer B^n pour tout n et en déduire une expression de A^n, puis de u_n, v_n et enfin M^n.

Correction

On calcule

$$\begin{aligned} B = P^{-1}AP &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$B = P^{-1}AP$, donc $PB = AP$, donc PBP^{-1}. Montrons ensuite par récurrence sur l'entier naturel n que $A^n = PB^nP^{-1}$. L'initialisation vient d'être faite. Ensuite, si $A^n = PB^nP^{-1}$,

alors $A^{n+1} = A^n \times A = (PB^nP^{-1})(PBP^{-1}) = PB^nBP^{-1} = PB^{n+1}P^{-1}$. Héréditaire et vraie au rang n, la proposition est donc vraie pour tout n.
On montre par une récurrence immédiate que pour tout entier naturel n, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$. On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} A^n &= PB^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & (-3)^n \\ 3 & -(3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+3(-3)^n & 1-(-3)^n \\ 3-3.(-3)^n & 3+(-3)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalement, on montre par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} &= A^n \times \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+3(-3)^n & 1-(-3)^n \\ 3-3.(-3)^n & 3+(-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1-(-3)^n \\ 3+(-3)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2-(-3)^n}{4}$ et $v_n = \dfrac{3+(-3)^n}{4}$.

Exercice 2. *Matrices symétriques et antisymétriques*. **1.** Soient A et B deux matrices symétriques. Montrer que A et B commutent si et seulement si AB est symétrique.

Correction

Procédons par équivalences :

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ commutent } &\Leftrightarrow AB = BA \\ &\Leftrightarrow (AB)^T = (BA)^T \\ &\Leftrightarrow (AB)^T = A^TB^T \\ &\Leftrightarrow (AB)^T = AB \text{ car } A \text{ et } B \text{ sont symétriques} \\ &\Leftrightarrow AB \text{ est symétrique,} \end{aligned}$$

d'où le résultat !

2. Établir un résultat équivalent pour les matrices antisymétriques.

Correction

On fait de même :

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ commutent } &\Leftrightarrow AB = BA \\ &\Leftrightarrow (AB)^T = (BA)^T \\ &\Leftrightarrow (AB)^T = A^T B^T \\ &\Leftrightarrow (AB)^T = (-A) \times (-B) = AB \text{ car } A \text{ et } B \text{ sont antisymétriques} \\ &\Leftrightarrow AB \text{ est symétrique,} \end{aligned}$$

donc A et B commutent si et seulement si AB est symétrique.

Exercice 3. *Matrices nilpotentes*. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On rappelle qu'une matrice carrée $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier p tel que $N^p = 0$.

1. Quelles sont les matrices nilpotentes triangulaires supérieures ? *On ne demande pas de justification particulière.*

Correction

Quelques petits calculs montrent facilement que les matrices triangulaires nilpotentes sont les matrices triangulaires n'ayant que des 0 sur la diagonale.

2. (a) Démontrer que si A et B sont deux matrices nilpotentes **qui commutent**, alors AB est nilpotente. Trouver deux matrices A et B de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que A et B soient nilpotentes mais pas AB.

Correction

Soit p tel que $A^p = 0$ et q tel que $B^q = 0$. Soit $r = \max(p, q)$. Alors $A^r = 0_n$ et $B^r = 0_n$. Donc, comme A et B commutent,

$$(AB)^r = A^r B^r = 0_n \times 0_n = 0_n,$$

donc AB est nilpotente.

En revanche, si l'on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui n'est pas nilpotente car pour tout n dans $\mathbb{N}$, $(AB)^n = AB$.

(b) Démontrer que si A et B sont deux matrices nilpotentes **qui commutent**, alors $A+B$ est nilpotente. Trouver deux matrices A et B de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que A et B soient nilpotentes mais pas $A+B$.

Correction

Soit p tel que $A^p = 0$ et q tel que $B^q = 0$. Soit $r = \max(p, q)$. Alors, comme A et B commutent, et par la formule du binôme de Newton,

$$(A+B)^{2r} = \sum_{k=0}^{2r} \binom{2r}{k} A^k B^{2r-k}.$$

Or, si $0 \leqslant k \leqslant r-1$, alors $2r-k \geqslant r$ donc $B^{2r-k}=0$ donc $A^kB^{2r-k}=0_n$. De même, si $k \geqslant r$, alors $A^k=0_n$ donc $A^kB^{2r-k}=0_n$. Donc tous les termes de la somme sont nuls donc $(A+B)^{2r}=0$.

En revanche, si l'on pose $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$. Alors $A+B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ et, pour tout p dans $\mathbb{N}$, on montre (par récurrence par exemple) que

$$(A+B)^{2p}=\mathrm{I}_2,\ (A+B)^{2p+1}=A+B,$$

donc $A+B$ n'est pas nilpotente.

3. Soit N une matrice nilpotente. Démontrer que I_n-N est inversible et donner son inverse sous la forme d'un polynôme en N.

Correction

Idée : utiliser la somme des termes d'une suite géométrique : on sait que si N était un réel, alors on aurait $\sum_{k=0}^{p-1} N^k = \frac{1-N^p}{1-N}$. Or, si $N^p=0$, on a en quelque sorte l'inverse de $1-N$. Mais, comme on n'a pas le droit d'écrire de fractions de matrices, on ne va écrire que des produits.

Soit p tel que $N^p=0$. Posons $M=\sum_{k=0}^{p-1} N^p$ (avec la convention $N^0=\mathrm{I}_n$). Alors

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}_n-N)M &= \sum_{k=0}^{p-1}(\mathrm{I}_n-N)N^k\\ &= \sum_{k=0}^{p-1} N^k-N^{k+1}\\ &= \mathrm{I}_n-N^p \text{ par télescopage}\\ &= \mathrm{I}_n \text{ car } N^p=0_n,\end{aligned}$$

et, de même, $M(\mathrm{I}_n-N)=\mathrm{I}_n$, donc I_n-N est inversible, d'inverse M.

Exercice 4. *Matrices de permutation.* On définit, si σ est une permutation de $[\![1,n]\!]$, $P_\sigma=(\delta_{i,\sigma(j)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Représenter P_σ si σ est une transposition, un p-cycle. Démontrer que l'application

$$\varphi : \left|\begin{array}{l}\mathfrak{S}_n \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\\ \sigma \mapsto P_\sigma\end{array}\right.$$

est un morphisme de groupes.

Exercice 5. *Théorème d'Hadamard.*
Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice carrée telle que : $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ i\neq j}} |a_{ij}| < |a_{ii}|$.

(On dit que A est à diagonale strictement dominante.) Démontrer que A est inversible.

Correction

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $AX = 0_{n,1}$.
Soit i_0 tel que $|x_{i_0}| = \max\{|x_i|, 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Alors en écrivant la ligne i_0 de la relation $AX = 0$, on obtient $\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}x_j = 0$, donc $a_{i_0,i_0}x_{i_0} = -\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i_0}} a_{i_0,j}x_j$, donc

$$|a_{i_0,i_0}||x_{i_0}| \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i_0}} |a_{i_0,j}||x_j| \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\ neq i_0}} |a_{i_0,j}||x_{i_0}|,$$

ce qui est impossible si $|x_{i_0}| \neq 0$. Donc $|x_{i_0}| = 0$, donc $X = 0$ donc A est inversible.
On a vu en cours une méthode théorique. On peut faire une méthode plus pratique.
Une remarque. Avoir juste $|a_{ii}| > |a_{ij}|$ pour tout j ne suffit pas. Par exemple, si M est la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, alors cette matrice vérifie la propriété $|a_{ii}| > |a_{ij}|$ pour tout j mais n'est pas inversible (la ligne 3 est obtenue comme somme des deux premières).

Mais la méthode d'Arthur peut fonctionner ! Démontrons tout de même que si la matrice est à diagonale strictement dominante, alors la matrice obtenue après chaque étape du pivot de Gauss est aussi à diagonale strictement dominante.
On ne le démontre qu'à la première étape, le reste s'en déduit de la même manière. Notons B la matrice obtenue après avoir fait sur A les opérations $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}L_1$. Fixons i dans $[\![1, n]\!]$.
Alors $b_{i,1} = 0$ et

$$\forall j \in [\![2, n]\!],\ \ b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}$$

Mais alors

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} |b_{ij}| &= \sum_{\substack{2\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} \left| a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}} \right| \text{ (la somme commence à 2 car } b_{i,1} = 0) \\ &\leqslant \sum_{\substack{2\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} |a_{ij}| + \frac{|a_{i1}|.|a_{1j}|}{|a_{11}|}. \\ &\leqslant \sum_{\substack{2\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} |a_{ij}| + \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|} \sum_{\substack{2\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} |a_{1j}|.\end{aligned}$$

Mais, par le caractère strictement dominant, on peut écrire que

$$\sum_{\substack{2\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} |a_{1j}| < |a_{11}| - |a_{1i}|,$$

et que

$$\sum_{\substack{2\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} |a_{ij}| < |a_{ii}| - |a_{i1}|,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} |b_{ij}| &< |a_{ii}| - |a_{i1}| + \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|}(|a_{11}| - |a_{1i}|)\\
&\leqslant |a_{ii}| - |a_{i1}| + |a_{i1}| - \frac{|a_{i1}|.|a_{1i}|}{|a_{11}|}\\
&\leqslant |a_{ii}| - \frac{|a_{i1}|.|a_{1i}|}{|a_{11}|}\\
&\leqslant \left|a_{ii} - \frac{a_{i1}a_{1i}}{a_{11}}\right| \text{ par inégalité triangulaire renversée.}\\
&\leqslant |b_{ii}|
\end{aligned}$$

Donc la matrice B est aussi à diagonale strictement dominante. Finalement, le caractère strictement dominant est préservé, ce qui permet d'assurer que la matrice est équivalente en lignes à I_n, donc est inversible !

2 Exercices à faire en TD

Stratégie à adopter. Il y a trois types d'exercices dans cette feuille de TD :

- les calculatoires purs : les exercices 6 et 7 sont des prolongements de 1, l'exercice 8 est aussi un simple calcul ; les exercices 13, 14 et 14 sont des calculs bruts sur des systèmes linéaires (utilisation du pivot) ; les exercices 16 et 17 sont des calculs bruts sur des matrices (utilisation du pivot aussi)
- les théoriques purs : ces exercices n'ont absolument pas besoin de faire des calculs explicites de produits matriciels (un peu comme les exercices 2 ou 3). Il s'agit des exercices 9 et de la seconde partie de 12.
- les théorico-calculatoires : exercices très importants, ils vous forcent à calculer des produits matriciels théoriques. Ce sont les exercices 10, 11, le début de 12, et les exercices plus difficiles 18 et 19.

Minimum conseillé. L'exercice 6, l'exercice 9, **si vous avez du mal à calculer, l'exercice 13 et 16**, l'exercice 11 (plus dur !) et l'exercice 12.

2.1 Matrices

Exercice 6. *Puissances de matrices*. ●●○

1. Calculer, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la puissance n-ième des matrices suivantes :

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Correction

On calcule les premières puissances : $A^0 = \mathrm{I}_2$, $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$. On peut conjecturer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$.
Démontrons ce résultat par récurrence :

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, $A^0 = \mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 0 & 2^0 - 1 \\ 0 & 2^0 \end{pmatrix}$.
- **Hérédité.** Supposons que pour un certain n, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Alors

$$A^{n+1} = A \times A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 + 2^n \\ 0 & 2 \times 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

D'où l'hérédité et le résultat.

(b) $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Correction

De même que précédemment, on démontre que pour tout n, $B^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$.

(c) Si $\theta \in \mathbb{R}$, $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Correction

De même, on démontre que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $R_\theta^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$

(d) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Correction

De même, on démontre que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $C^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

(e) $M_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ (matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

Correction

On calcule $M_p^2 = \begin{pmatrix} p-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$,

puis $M_p^3 = \begin{pmatrix} 0 & p-1 & \cdots & p-1 \\ p-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p-1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (p-1)M_p$. On en déduit, par récurrence, que pour tout n dans $\mathbb{N}$:

- si $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $M_p^n = (p-1)^{k-1} M_p^2$.
- si $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $M_p^n = (p-1)^k M_p$.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ (avec a et b des réels et, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = \cos(\theta)u_n - \sin(\theta)v_n \\ v_{n+1} = \sin(\theta)u_n + \cos(\theta)v_n \end{cases}$$

En posant, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, donner l'expression du terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction

La relation de récurrence ci-dessus nous indique que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = R_\theta U_n$, donc, par récurrence immédiate,

$$U_n = \mathbb{R}_\theta^n U_0 = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(n\theta)a - \sin(n\theta)b \\ \sin(n\theta)a + \cos(n\theta)b \end{pmatrix},$$

donc, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = \cos(n\theta)a - \sin(n\theta)b$ et $v_n = \sin(n\theta)a + \cos(n\theta)b$.

Exercice 7. ●◐○ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $-A^3 + A^2 + 5A - \mathrm{I}_3$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Correction

En faisant le calcul, on remarque que $-A^3 + A^2 + 5A - \mathrm{I}_3 = 0_3$. Donc $-A^3 + A^2 + 5A = \mathrm{I}_3$, donc $A(-A^2 + A + 5\mathrm{I}_3) = \mathrm{I}_3$, donc A est inversible d'inverse $-A^2 + A + 5\mathrm{I}_3$.

Exercice 8. *Inversibilité des matrices d'ordre* 2. ●●○ Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$

Calculer $A^2-(a+d)A+(ad-bc)\mathrm{I}_2$. À quelle condition A est-elle inversible ? Déterminer alors A^{-1}.

Correction

On calcule et on remarque que $A^2-(a+d)A+(ad-bc)\mathrm{I}_2=0$. Disjoignons alors les cas :

- si $ad-bc\neq 0$, alors $-\dfrac{1}{ad-bc}\left(A^2-(a+d)A\right)=\mathrm{I}_2$, i.e.
$$A\times\frac{1}{ad-bc}\left((a+d)\mathrm{I}_2-A\right)=\mathrm{I}_2,$$
donc A est inversible d'inverse
$$\frac{1}{ad-bc}\left((a+d)\mathrm{I}_2-A\right)=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$
- si $ad-bc=0$, alors $A(A-(a+d)\mathrm{I}_2)=0$. Si A était inversible, alors en multipliant par A^{-1}, on aurait $A-(a+d)\mathrm{I}_2=0$, i.e. $A=(a+d)\mathrm{I}_2$ donc $a=a+d$ et $d=a+d$ donc $a=d=0$, i.e. $A=0$, absurde ! Donc A n'est pas inversible.

Finalement, A est inversible ssi $ad-bc\neq 0$ et, dans ce cas, $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$.

Exercice 9. *Relation de similitude*. ●○○

1. Montrer que la relation $\sim$ définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par $A\sim B$ ssi « il existe $P\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible vérifiant $A=PBP^{-1}$ » est une relation d'équivalence.

Correction

Démontrons que $\sim$ est réflexive, symétrique et transitive :

(i) **Réflexivité.** Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Posons $P=\mathrm{I}_n$. Alors $P^{-1}=P$ et $A=PAP^{-1}$ donc $A\sim A$, donc $\sim$ est réflexive.

(ii) **Symétrie.** Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A\sim B$. Alors on dispose de $P\in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A=PBP^{-1}$. Alors $B=P^{-1}A(P^{-1})^{-1}$ avec $P^{-1}\in GL_n(\mathbb{K})$ donc $B\sim A$. Donc $\sim$ est symétrique.

(iii) **Transitivité.** Soient A, B et C trois matrices telles que $A\sim B$ et $B\sim C$. Alors on dispose de P et Q dans $GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A=PBP^{-1}$ et $B=QCQ^{-1}$. Alors $A=P(QCQ^{-1})P^{-1}=(PQ)C(PQ)^{-1}$, donc $A\sim C$. D'où la transitivité.

Donc la relation de conjugaison est une relation d'équivalence.

On appelle cette relation relation de *similitude* et on dit que deux matrices A et B qui satisfont cette relation sont semblables. Soient alors A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ semblables.

2. Montrer que si l'une des deux matrices A ou B est inversible, alors l'autre aussi.

Correction

Supposons que B soit inversible. Alors A est le produit de 3 matrices inversibles, donc A est inversible, et son inverse est $A^{-1}=PB^{-1}P^{-1}$. De même, $B=P^{-1}AP$ donc si A est inversible, B est inversible et $B^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$.

3. Montrer que si $B = \lambda \mathrm{I}_n$ ($\lambda \in \mathbb{K}$), alors $A = B$. Quelle est la classe d'équivalence d'une matrice scalaire ?

Correction

Si $B = \lambda \mathrm{I}_n$, alors $A = PBP^{-1} = P\lambda \mathrm{I}_n P^{-1} = \lambda P \mathrm{I}_n P^{-1} = \lambda PP^{-1} = \lambda \mathrm{I}_n$, donc $A = B$. On vient de démontrer que si B est une matrice scalaire (i.e. $B = \lambda \mathrm{I}_n$), alors la classe d'équivalence de B est réduite à un singleton.

4. Montrer que si l'une des deux matrices A ou B est nilpotente (il existe un entier p tel que $A^p = 0_n$ ou $B^p = 0_n$), alors l'autre aussi.

Correction

Soit p tel que $B^p = 0$. Alors $A^2 = PBP^{-1}PBP^{-1} = PB^2P^{-1}$ et, par récurrence immédiate, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $A^k = PB^kP^{-1}$ donc, en particulier, $A^p = PB^pP^{-1} = P \times 0_n \times P^{-1} = 0_n$. Donc A est niplotente. La réciproque est évidente par symétrie.

Exercice 10. *Matrices élémentaires*. ●○○ Soit n un entier non nul. Pour i et j dans $[\![1, n]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice avec tous les coefficients nuls, sauf le coefficient (i, j) égal à 1.

1. Calculer $E_{i,j} \times E_{k,l}$.

Correction

Écrivons $E_{i,j} = (a_{r,s})_{1\leqslant r,s\leqslant n}$ et $E_{k,\ell} = (b_{r,s})_{1\leqslant r,s\leqslant n}$. Alors $a_{r,s} = \delta_{i,r}\delta_{j,s}$ et $b_{r,s} = \delta_{k,r}\delta_{\ell,s}$. Posons finalement $E_{i,j}E_{k,l} = (c_{r,s})_{1\leqslant r,s\leqslant n}$. Alors, pour tous r et s dans $[\![1, n]\!]$, on a

$$c_{r,s} = \sum_{t=1}^{n} a_{r,t}b_{t,s} = \sum_{t=1}^{n} \delta_{i,r}\delta_{j,t}\delta_{k,t}\delta_{\ell,s}.$$

Maintenant, une chose qui peut être faite pour simplifier un peu cette somme est de sortir les symboles de Kronecker qui ne dépendent pas de l'indice de sommation ! On écrit alors

$$c_{r,s} = \sum_{t=1}^{n} a_{r,t}b_{t,s} = \delta_{i,r}\delta_{\ell,s} \sum_{t=1}^{n} \delta_{j,t}\delta_{k,t}.$$

Il faut donc déterminer ce que vaut $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \delta_{j,t}\delta_{k,t}$:

- si $j \neq k$, alors on n'aura jamais de t tel que $j = t$ et $k = t$, donc la somme est nulle.
- si $j = k$, alors $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \delta_{j,t}\delta_{k,t} = \sum_{t=1}^{n} \delta_{j,t}\delta_{j,t}$, et $\delta_{j,t}$ est nul sauf pour $t = j$, donc la somme est réduite à un seul élément, et est finalement égale à 1.

Finalement, $\sum_{t=1}^{n} \delta_{j,t}\delta_{k,t}$ est nulle si $j \neq k$, égale à 1 si $j = k$, donc $\sum_{t=1}^{n} \delta_{j,t}\delta_{k,t} = \delta_{j,k}$.
Finalement,

$$c_{r,s} = \underbrace{\delta_{j,k}}_{\text{ne dépend pas de } (r,s)} \underbrace{\delta_{i,r}\delta_{\ell,s}}_{\text{coefficient matriciel}},$$

donc $(c_{r,s})_{1\leqslant r,s\leqslant n} = (\delta_{j,k}\delta_{i,r}\delta_{\ell,s})_{1\leqslant r,s\leqslant n} = \delta_{j,k}(\delta_{i,r}\delta_{\ell,s})_{1\leqslant r,s\leqslant n}$, et on reconnaît les coefficients de $E_{i\ell}$. Donc, finalement,

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{j,k}E_{i\ell}$$

2. Si $A = (a_{rs})_{1\leqslant r,s\leqslant n}$, calculer $E_{i,j} \times A$ et $A \times E_{i,j}$.

Correction

La seconde question peut aussi tout à fait se faire formellement.
Posons $A = (a_{r,s})_{1\leqslant r,s\leqslant n}$ et $E_{i,j} = (\delta_{i,r}\delta_{j,s})_{1\leqslant r,s\leqslant n}$ (pour une fois j'utilise un intermédiaire de moins, en donnant directement l'expression de $E_{i,j}$). Alors si on écrit $E_{i,j} \times A = (b_{r,s})_{1\leqslant r,s\leqslant n}$, on a, pour tous r et s dans $[\![0, n]\!]$,

$$b_{r,s} = \sum_{t=1}^{n} e_{r,t}a_{t,s} = \sum_{t=1}^{n} \delta_{i,r}\delta_{j,t}a_{t,s} = \delta_{i,r}\sum_{t=1}^{n} \delta_{j,t}a_{t,s},$$

la somme n'ayant que des termes nuls sauf pour $t = j$, don

$$b_{r,s} = \delta_{i,r}a_{j,s}.$$

Autrement dit B est une matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf la ligne i qui reçoit les coefficients de la ligne j de A.
De même si l'on écrit $A \times E_{i,j} = C = (c_{r,s})_{1\leqslant r,s\leqslant n}$, on obtient

$$c_{r,s} = \sum_{t=1}^{n} a_{r,t}e_{t,s} = \sum_{t=1}^{n} a_{r,t}\delta_{i,t}\delta_{j,s} = \delta_{j,s}\sum_{t=1}^{n} a_{r,t}\delta_{i,t},$$

donc, de même, $c_{r,s} = \delta_{j,s}a_{r,i}$. Autrement dit la matrice n'a que des coefficients nuls, sauf la j-ième colonne qui reçoit les coefficients de la colonne i de A.

Exercice 11. *Questions de commutation.* ●●○

1. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Déterminer les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec D.

Correction

Analyse. Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice commutant avec D. Alors on remarque que

$$A\times D=\begin{pmatrix}\lambda_1 a_{1,1} & \lambda_2 a_{1,2} & \dots & \dots & \lambda_n a_{1,n}\\ \lambda_1 a_{2,1} & \lambda_2 a_{2,2} & \dots & \dots & \lambda_n a_{2,n}\\ \vdots & \vdots & & & \vdots\\ \lambda_1 a_{n,1} & \lambda_2 a_{n,2} & \dots & \dots & \lambda_n a_{n,n}\end{pmatrix}$$

$$\text{et } D\times A=\begin{pmatrix}\lambda_1 a_{1,1} & \lambda_1 a_{1,2} & \dots & \dots & \lambda_1 a_{1,n}\\ \lambda_2 a_{2,1} & \lambda_2 a_{2,2} & \dots & \dots & \lambda_2 a_{2,n}\\ \vdots & \vdots & & & \vdots\\ \lambda_n a_{n,1} & \lambda_n a_{n,2} & \dots & \dots & \lambda_n a_{n,n}\end{pmatrix}.$$

Donc si $AD=DA$, on a, pour $i\neq j$, $\lambda_i a_{i,j}=\lambda_j a_{i,j}$ avec $\lambda_i\neq\lambda_j$, ce qui n'est possible que si $a_{i,j}=0$. Donc A est diagonale !
Synthèse. On remarque facilement, avec les calculs ci-dessus, que si A est diagonale, alors A commute avec D.

2. Déterminer l'ensemble des matrices A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\forall B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ AB=BA.$$

Correction

Analyse. Si A est une matrice commutant avec toutes les autres, en particulier elle commute avec une matrice du type de D, donc elle est diagonale. Soient alors $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ les coefficients diagonaux de A.
Enfin, si $P_{i,j}$ est la matrice de permutation telle que $P_{i,j}A$ soit la matrice A avec les lignes i et j échangées, on sait que $AP_{i,j}$ est la matrice A avec les colonnes i et j échangées. Mais alors le coefficient (i,j) de $P_{i,j}A$ est α_j alors que le coefficient (i,j) de $AP_{i,j}$ est α_i. Donc $\alpha_i=\alpha_j$ pour tous i et j. Donc finalement tous les coefficients de A sont égaux, donc A est diagonale avec le même coefficient sur la diagonale : on dit que A est scalaire.

Exercice 12. *Inégalité de Cauchy-Schwarz pour la trace.* ●●○ Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour toute matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(A^TA)\geqslant 0$, avec égalité si, et seulement si $A=0$.

Correction

Écrivons $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, et $B=A^T=(b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Posons $AB=(c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Alors pour tout i et j,

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^n a_{ik}a_{jk}.$$

Donc

$$\mathrm{Tr}(A^TA)=\sum_{i=1}^n c_{ii}=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{ik}^2\geqslant 0,$$

et cette somme est nulle si, et seulement si tous les termes de la somme sont nuls (comme ils sont positifs), i.e. ssi pour tout i et pour tout k, $a_{ik} = 0$, i.e. ssi A est la matrice nulle.

2. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit, pour tout x dans $\mathbb{R}$, la fonction $f(x) = \mathrm{Tr}((A+xB)\times(A+xB)^T)$.

(a) Développer f et montrer qu'il s'agit d'un polynôme de degré 2 en x.

Correction

Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{Tr}((A+xB)\times(A+xB)^T)\\
&= \mathrm{Tr}((A+xB)(A^T+xB^T))\\
&= \mathrm{Tr}(AA^T xAB^T + xBA^T + x^2BB^T)\\
&= \mathrm{Tr}(AA^T) + x\mathrm{Tr}(AB^T) + x\mathrm{Tr}(BA^T) + x^2\mathrm{Tr}(BB^T)\\
&= \mathrm{Tr}(A^TA) + x\mathrm{Tr}(AB^T) + x\mathrm{Tr}((BA^T)^T) + x^2\mathrm{Tr}(B^TB) \text{ car } \mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM) \text{ et } \mathrm{Tr}(M^T) = \mathrm{Tr}(M)\\
&= \mathrm{Tr}(A^TA) + 2x\mathrm{Tr}(AB^T) + x^2\mathrm{Tr}(B^TB),
\end{aligned}$$

qui est bien un polynôme en x.

(b) En étudiant son signe et son discriminant, montrer que $\mathrm{Tr}(AB^T)^2 \leqslant \mathrm{Tr}(A^TA)\mathrm{Tr}(B^TB)$.

Correction

On sait par la question précédente que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{Tr}((A+xB)\times(A+xB)^T) \geqslant 0$. Donc le discriminant de ce polynôme est négatif ou nul. Donc

$$4\mathrm{Tr}(AB^T)^2 - 4\mathrm{Tr}(A^TA)\mathrm{Tr}(B^TB) \leqslant 0,$$

d'où l'inégalité souhaitée !

2.2 Matrices et systèmes linéaires – méthode du pivot

On présentera les solutions des systèmes linéaires en utilisant la notation Vect.

Exercice 13. ●○○ Résoudre les systèmes linéaires suivants (en appliquant l'algorithme de Gauss), par rapport aux indéterminées $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$:

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_3 + 3x_4 = -2 \\ -4x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 13 \\ 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9 \end{cases}$.

 nlaillet.math@gmail.com

Correction

Je ne donne que les réponses : pour le premier système, il s'agit de l'ensemble $\begin{pmatrix}-2\\6\\4\\0\end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\-5\\-3\\1\end{pmatrix}$. Pour le second système, il n'y a qu'une solution, $\begin{pmatrix}2\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Exercice 14. ●◐○ Déterminer pour quels valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ le système :

$$\begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ 2y + az = b \\ -x + ay + 3z = a \end{cases}$$

1. admet une solution unique ;
2. admet une infinité de solutions ;
3. n'a pas de solutions.

Expliciter les solutions pour $a = b = 2$.

Correction

Échelonnons le système

$$\begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ 2y + az = b \\ -x + ay + 3z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + ay + 3z = a & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ 2y + az = b \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + ay + 3z = a \\ 2y + az = b \\ 2ay + 9z = 2a & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + ay + 3z = a \\ 2y + az = b \\ (9 - a^2)z = (2 - b)a & L_3 \leftarrow L_3 - aL_2 \end{cases}$$

Donc, si $a \neq \pm 3$, il y a une unique de solutions. Si $a = \pm 3$, il y a une infinité de solutions si $b = 2$, aucune sinon.
Dans le cas $a = b = 2$, le système se réécrit

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 2 \\ 2y + 2z = 2 \\ 5z = 0 \end{cases}$$

Donc $z = 0$, $y = 1$ et $x = 0$. La solution est le singleton constitué du vecteur $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 15. ●○○ Résoudre les systèmes linéaires suivants (en appliquant l'algorithme de Gauss), par rapport aux indéterminées complexes $x, y, z \in \mathbb{C}$:

1. $\begin{cases} x + iy = 0 \\ 3x + 2y + z = 4 + i \\ ix - y + (1+i)z = 2 \end{cases}$,

2. $\begin{cases} x + iy - 3z = 1 \\ ix - y - iz = -1 \\ -x - iy - (3+4i)z = -3 - 2i \end{cases}$.

Correction

Pour le premier système, l'unique solution est le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1-i \end{pmatrix}$. Pour le second système, il s'agit de la droite $\begin{pmatrix} \dfrac{3i-1}{2} \\ 0 \\ \dfrac{i-1}{2} \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 16. ●◐○ Calculer les inverses des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Correction

Ne donnons que les inverses. En cas de problème, me demander !

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 & 5 \\ -2 & 4 & 6 & 0 \\ -5 & -10 & -5 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \end{pmatrix},\ N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 17. ●●○ Pour chacune de ces matrices, discuter suivant les valeurs du réel m si elle est inversible, et donner le cas échéant son inverse.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 0 & m \\ m-1 & m-2 & 1-m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

Correction

Écrivons

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & m & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & m & 0 & 1 & 0 \\ m-1 & m+2 & 1-m & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-m^2 & 1-m & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (m-1)L_1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & m & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-m^2 & 1-m & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow -L_2$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & m & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1-m^2} & 2-m & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

Deux situations arrivent alors : comme on a une matrice triangulaire supérieure, on connaît sa CNS d'inversibilité :

- si $1 - m^2 = 0$, i.e. $m = \pm 1$, alors la matrice n'est pas inversible.
- si $1 - m^2 \neq 0$, la matrice est inversible. On détermine alors son inverse.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & m & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1-m^2} & 2-m & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & m & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{2-m}{1-m^2} & -\dfrac{1}{1-m^2} & \dfrac{1}{1-m^2} \end{array}\right)$$

$$\left(L_3 \leftarrow \frac{1}{1-m^2} L_3\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dfrac{m^2-2m}{1-m^2} & \dfrac{1+m-m^2}{1-m^2} & \dfrac{-m}{1-m^2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \dfrac{2-m}{1-m^2} & -\dfrac{1}{1-m^2} & \dfrac{1}{1-m^2} \end{array}\right)$$

$$(L_1 \leftarrow L_1 - mL_3)$$

La matrice est donc inversible d'inverse

$$\frac{1}{1-m^2} \begin{pmatrix} m^2-2m & 1+m-m^2 & -m \\ 1-m^2 & 1-m^2 & 0 \\ 2-m & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour la seconde matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} m & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & m & 0 & 0 & 1 \\ 1 & m & 1 & 0 & 1 & 0 \\ m & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & m & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1 & 0 & -m \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & m & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1 & 1 & -m-1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

Remarque : ici, on voit bien l'intérêt de ne pas avoir divisé directement par le pivot. En effet, on a directemet une matrice triangulaire, et on a directement la disjonction de cas suivante, faite en remarquand que $2 - m - m^2 = -(m-1)(m+2)$.

- si $m = 1$, alors $1 - m = 0$ et $2 - m - m^2 = 0$ donc la matrice n'est pas inversible.
- si $m = 2$, alors $1 - m \neq 0$ et $2 - m - m^2 = 0$, donc la matrice n'est pas inversible.
- sinon, la matrice est inversible : on part de

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & m & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1 & 1 & -m-1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & m & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{m-1} & -\frac{1}{m-1} \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1 & 1 & -m-1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow \frac{1}{m-1} L_2$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & m+1 & 0 & -\frac{1}{m-1} & \frac{m}{m-1} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{m-1} & -\frac{1}{m-1} \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1 & 1 & -m-1 \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & m+1 & 0 & -\frac{1}{m-1} & \frac{m}{m-1} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{m-1} & -\frac{1}{m-1} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{(m-1)(m+2)} & -\frac{1}{(m-1)(m+2)} & \frac{m+1}{(m-1)(m+2)} \end{array}\right)$$

$$(L_3 \leftarrow -\frac{1}{(m-1)(m+2)} L_3)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{m+1}{(m-1)(m+2)} & \frac{m+1}{(m-1)(m+2)} - \frac{1}{m-1} & \frac{m}{m-1} - \frac{(m+1)^2}{(m-1)(m+2)} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{(m-1)(m+2)} & \frac{m+1}{(m-1)(m+2)} & \frac{-1}{(m-1)(m+2)} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{(m-1)(m+2)} & -\frac{1}{(m-1)(m+2)} & -\frac{m+1}{(m-1)(m+2)} \end{array}\right)$$

$$(L_1 \leftarrow L_1 - (m+1)L_3 \ ; \ L_2 \leftarrow L_2 + L_3)$$

On en déduit que l'inverse de la matrice est

$$\frac{1}{(m-1)(m+2)}\begin{pmatrix} m+1 & -1 & -1 \\ -1 & m+1 & -1 \\ -1 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$$

Exercice 18. *Inverse de la matrice des coefficients binomiaux*. ●●◐ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A la matrice définie par $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où, pour tous i et j dans $\mathbb{N}$, $a_{ij} = \binom{i-1}{j-1}$ (coefficient binomial).

1. Représenter A dans le cas $n = 3$.

Correction

Dans le cas où $n = 3$, on a $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées de AU.

Correction

On calcule le produit matriciel, en écrivant que $AU = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, où pour tout i, $v_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_k = \sum_{k=1}^{n} \binom{i-1}{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{i} \binom{i-1}{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} x^k = (x+1)^{i-1}$, donc $AU = \begin{pmatrix} 1 \\ x+1 \\ (x+1)^2 \\ \vdots \\ (x+1)^{n-1} \end{pmatrix}$.

3. Soit V le vecteur $V = \begin{pmatrix} 1 \\ x+1 \\ (x+1)^2 \\ \vdots \\ (x+1)^{n-1} \end{pmatrix}$. En posant $y = x + 1$, exprimer les coordonnées de V, puis de U, en fonction de y. En déduire une matrice B telle que $U = BV$.

Correction

On écrit que

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ (y-1) \\ (y-1)^2 \\ \vdots \\ (y-1)^n \end{pmatrix},$$

donc, pour tout i dans $[\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned} u_i = (y-1)^{i-1} &= \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} (-1)^{i-1-k} y^k = \sum_{k=1}^{i} \binom{i-1}{k-1} (-1)^{i-k} y^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{i-1}{k-1} (-1)^{i-k} y^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} v_k, \end{aligned}$$

où pour tous i et j, $b_{ij} = (-1)^{i-j} \binom{i-1}{j-1}$. Donc si l'on pose $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $U = BV$.

4. En déduire un inverse possible de A et vérifier que cet inverse potentiel est un inverse effectif.

Correction

On peut alors vouloir dire que B est l'inverse de A. Cependant, le fait que $V = AU$ et $U = BV$, i.e. $BAU = U$, ne suffit pas à affirmer que A est inversible, car U est un simple vecteur. Il faut donc effectuer concrètement le produit matriciel AB (ou BA). Posons $AB = (c_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Alors pour tous i et j dans $[\![1, n]\!]$,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \binom{i-1}{k-1} (-1)^{k-j} \binom{k-1}{j-1}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \binom{i-1}{k-1}\binom{k-1}{j-1} &= \frac{(i-1)!}{(k-1)!(i-k)!} \frac{(k-1)!}{(j-1)!(k-j)!} \\ &= \frac{(i-1)!}{(i-k)!} \frac{1}{(j-1)!(k-j)!} \times \frac{(i-j)!}{(i-j)!} \\ &= \frac{(i-1)!}{(j-1)!(i-j)!} \frac{(i-j)!}{(i-k)!(k-j)!} \\ &= \binom{i-1}{j-1}\binom{i-j}{k-j} \end{aligned}$$

Exercice 19. *Relation d'équivalence*. ●●● Soient n et p deux entiers naturels non nuls, A et B deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont équivalentes en lignes-colonnes si on peut passer de A à B par des opérations élémentaires sur les lignes **et** sur les colonnes.

1. Démontrer que A et B sont équivalentes en lignes-colonnes si, et seulement s'il existe P dans $GL_n(\mathbb{K})$ et Q dans $GL_p(\mathbb{K})$ telles que $A = PBQ$.

On dira désormais, si A et B sont équivalentes en lignes-colonnes, que A et B sont équivalentes.

2. Démontrer que A est équivalente à une matrice de la forme $J_{n,p,r}$ où $J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$,

   avec r « 1 » dans la diagonale.

3. Démontrer que si $n = p$ et A n'est pas inversible, alors A est équivalente à une matrice triangulaire supérieure stricte.

Indications

?? Attention, une matrice carrée peut être multipliée avec elle-même.

1 Pour la dernière question, penser au fait que $A = PBP^{-1}$ et que $A^2 = PBP^{-1}PBP^{-1} = PB^2P^{-1}$... Poursuivre avec une récurrence.

2 Utiliser la formule de la transposée d'un produit.

3 Penser que si A et B commutent, $(AB)^k = A^kB^k$, et que si A et B commutent, le binôme de Newton s'applique ! Enfin, pour la dernière question, penser que $\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n - N^p$.

5 Utiliser le fait que A est inversible ssi : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = 0_{n,1} \Rightarrow X = 0_{n,1}$.

Et considérer, si X est tel que $AX = 0_{n,1}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, i_m tel que $|x_{i_m}| = \max\{|x_k|,\ k \in [\![1, n]\!]\}$.

6 Tester les premières puissances $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, puis conjecturer un résultat à démontrer par récurrence !

7 Faire le calcul, et ensuite, écrire l'équation sous la forme $M(...) = \mathrm{I}_n$.

8 Faire le calcul !

9 Utiliser que si $A = PBP^{-1}$, $B = P^{-1}AP$.

10 Cf. cours. De plus, je conseille de partir sur deux preuves : ou bien l'utilisation brute du symbole de Kronecker, ou bien les produits matriciels « avec les mains ». Il faut pouvoir mener les deux raisonnements.

11
 1. Écrire proprement, coefficient par coefficient, la relation $AD = DA$, et montrer que le commutant de D est l'ensemble des matrices diagonales.
 2. Prendre A commutant avec toutes les matrices. Montrer que, par la question précédente, A est diagonale, puis la faire commuter avec une matrice de permutation P_{ij} pour montrer que son i-ème coefficient diagonal et son j-ème coefficient diagonal sont égaux.

12 Pour la première question, écrire coefficient par coefficient. Pour la deuxième, ne pas revenir aux coefficients et utiliser simplement la linéarité de la trace et le fait que x est un réel.

13 C'est du pivot de Gauss simple.

14 Ne pas oublier de disjoindre les cas dès lors qu'on fait une opération potentiellement interdite (division par un nombre qui dépend d'un paramètre, multiplication d'une ligne par un nombre dépendant d'u paramètre, etc.)

15 C'est simplement du pivot de Gauss.

16 C'est simplement du pivot de Gauss.

17 Ne pas oublier de disjoindre les cas dès lors qu'on fait une opération potentiellement interdite (division par un nombre qui dépend d'un paramètre, multiplication d'une ligne par un nombre dépendant d'u paramètre, etc.)

18 Ne pas oublier la formule du binôme de Newton ! Pour la dernière question, plus délicate, démontrer que $\binom{i-1}{k-1}\binom{k-1}{j-1} = \binom{i-1}{j-1}\binom{i-j}{k-j}$.

19 Utiliser en détail les propriétés du poly sur le pivot de Gauss, et notamment que toute matrice inversible est équivalente en lignes à une matrice échelonnée. Essayer ensuite de montrer qu'une matrice échelonnée est équivalente en colonnes à $J_{n,p,r}$.