 nlaillet.math@gmail.com

TD 15
Analyse asymptotique

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. Effectuer le dl...

1. à l'ordre 3 en 0 de $\text{th}(x)$.
2. à l'ordre 3 en 0 de $\sin(x) + \text{sh}(x) - \tan(x) - \text{th}(x)$.
3. à l'ordre 3 en 0 de $(e^x + \sin(x))(1 - \ln(1 + x))$.
4. à l'ordre 3 en 1 de $e^x + \ln(x)$.
5. à l'ordre 2 en $\dfrac{\pi}{4}$ de $\cos(x) - \sin(x)$.
6. à l'ordre 100 en 0 de $\ln\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$.

Exercice 2. Déterminer les limites suivantes

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2(x)}$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n$

Exercice 3. Déterminer la limite ℓ, quand n tend vers $+\infty$, de

$$u_n = \left(2\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)^{n^2},$$

ainsi qu'un équivalent simple de $u_n - \ell$.

Exercice 4. *Études locales.*

1. Étudier le prolongement par continuité et la dérivabilité (et, le cas échéant, la position relative de la courbe et de la tangente) de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{1+\sin(x)} - e}{\tan(x)}$, au point d'abscisse 0.
2. Étudier, au voisinage de 0, $g : x \mapsto \dfrac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$.
3. Étudier, au voisinage de $+\infty$, la fonction $h : x \mapsto \dfrac{x\text{ch}(x) - \text{sh}(x)}{\text{ch}x - 1}$.

Exercice 5. *Étude d'une bijection réciproque*. Soit $f(x) = x + \ln x$ pour $x > 0$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. On note $g = f^{-1}$.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. Trouver le développement limité de g en 1 à l'ordre 2 .
4. Donner un développement asymptotique de g en $+\infty$ à trois termes (on pourra remarquer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $g(y) + \ln(g(y)) = y$).

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Exercice 6. **1.** Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution, que l'on notera u_n.

2. Démontrer que u_n possède une limite que l'on déterminera.

3. Montrer que $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

2 Exercices faits en TD

Exercice 7. ●○○ Effectuer le développement limité...

1. à l'ordre 3 en 0 de $\frac{1}{1-x} - \mathrm{e}^x$.
2. à l'ordre 5 en 0 de $\sin(x)\cos(2x)$.
3. à l'ordre 3 en 0 de $(x^3+1)\sqrt{1-x}$.
4. à l'ordre 4 en 0 de $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$.
5. à l'ordre 4 en 0 de $\cos(x)\ln(1+x)$.
6. à l'ordre 4 en 0 de $(\ln(1+x))^2$.
7. à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$ de $\sin(x)$.
8. à l'ordre 3 en 0 de $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$.
9. à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+\sin x)$.
10. à l'ordre 3 en 1 de $\cos(\ln(x))$.
11. à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+\mathrm{e}^x)$.
12. à l'ordre 3 en 0 de $\ln(2+\sin x)$.
13. à l'ordre 3 en 0 de $\mathrm{e}^{\sqrt{1+x}}$.
14. à l'ordre 2 en 0 de $\ln(1+\sqrt{1+x})$.
15. à l'ordre 3 en 0 de $\ln(3\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$.
16. à l'ordre 2 en 0 de $(1+x)^{1/x}$.
17. à l'ordre 4 en 0 de $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$.
18. à l'ordre 3 en 0 de $\frac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^x - 1}$.
19. à l'ordre 2 en 0 de $\frac{\mathrm{Arctan} x}{\tan x}$.
20. à l'ordre 2 en 1 de $\frac{x-1}{\ln x}$.
21. à l'ordre 6 en 0 de $(\cos(x))^{\sin(x)}$.
22. à l'ordre 4 en 1 de $\frac{\ln(x)}{x^2}$.
23. à l'ordre 4 en 0 de $\ln\left(\frac{\mathrm{th}(x)}{x}\right)$.
24. à l'ordre 100 en 0 de $\ln\left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$.

Exercice 8. ●●○ Déterminer un équivalent simple, lorsque x tend vers 0, de $\frac{2}{x} - \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}$.
En déduire la limite, quand x tend vers 0^+, de $\frac{2}{x} - \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}$

Exercice 9. ●●○ En s'intéressant d'abord au dl de $f'(x)$, déterminer la dl à l'ordre 4 en 0 de $f(x)$ où $f : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Exercice 10. ●●○ Déterimner les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x + \cos(x) - x}{\sin(x) - \ln(1+x)}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1}\right)^{x^2}$
3. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}}$
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right)^n$

Exercice 11. *Détermination d'équivalents*. ●●○

1. Déterminer un équivalent en $\frac{\pi}{2}$ de $f(x) = \cos(\cos x) - \sin x$.
2. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $f(x) = \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1$.

Exercice 12. ●●○ On définit $f : x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{x}$ pour tout réel x non nul.

1. Montrer que f se prolonge par continuité en 0 et préciser la valeur à choisir pour $f(0)$.
2. Montrer que f, ainsi prolongée, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier la parité, les variations et les limites en $\pm\infty$ de f. Dessiner le graphe de f.
4. Donner un développement asymptotique de $f(x)$ en $+\infty$ sous la forme $a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \dfrac{a_2}{x^2} + \dfrac{a_3}{x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

Exercice 13. ●●◐ Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on considère la fonction $f_a : x \in \mathbb{R} \longmapsto a^{(a^x)}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que f_a est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donner l'expression de f_a' et f_a''. Montrer que si $a \geqslant 1$, f_a'' ne s'annule pas et que si $a < 1$, f_a'' s'annule en un unique point que l'on notera x_a et dont on déterminera l'expression explicite en fonction de a.
2. Soit $a \in]0, 1[$. Calculer $f_a^{(3)}(x_a)$. En déduire que x_a est le paramètre d'un point d'inflexion du graphe de f_a.
3. Déterminer le lieu des points d'inflexion du graphe de la fonction f_a lorsque a varie dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 14. ●●○ Étudier l'équation de la tangente ainsi que la position relative de la courbe d'équation $y = (\operatorname{ch}(x))^{\frac{1}{x}}$, au point d'abscisse 0.

Exercice 15. ●●○ Étudier les asymptotes éventuelles en $+\infty$ des courbes représentatives des fonctions suivantes, ainsi que la position relative de la courbe par rapport à son asymptote :

1. $f : x \mapsto (x+1)e^{\frac{1}{x}}$.
2. $g : x \mapsto \sqrt[3]{(x^2-1)(x+2)}$.

Exercice 16. *Le retour de la Suite définie implicitement*. ●●○

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier que l'équation
$$x + e^x = n$$
possède une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer la limite de (x_n) puis un équivalent simple de x_n.
3. Déterminer un équivalent de $x_n - \ln(n)$.

Exercice 17. *La vengeance de la suite définie implicitement*. ●●◐ On considère pour tout entier $n \geqslant 1$, l'unique solution $u_n \in [0, 1]$ de l'équation $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$. Justifier l'existence de u_n, donner la monotonie de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et déterminer sa limite ℓ. Donner un équivalent simple de $u_n - \ell$.