MPSI1 – Programme de colles
Semaine 15 – du 22 au 26 janvier 2023

Dérivabilité

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité en un point, nombre dérivé. La dérivabilité entraîne la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite.	Définition par le taux d'accroissement. Caractérisation : une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Dans ce cas $$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h), \text{ où } \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$ Interprétation géométrique : tangente. Interprétation cinématique : vitesse instantanée.
Dérivabilité et dérivée sur un intervalle. Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.	Tangente au graphe d'une fonction réciproque.
b) Extremum local et point critique	
Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.	Un point critique est un zéro de la dérivée.
c) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	
Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $\|f'\|$ est majorée par K, alors f est K-lipschitzienne.	Interprétations géométrique et cinématique. La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion. Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.	
Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. Extension au cas où $\ell = \pm\infty$.	La fonction f' est alors continue en a.
d) Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$	
Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe $\mathscr{C}^k$. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.	Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.
e) Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe $\mathscr{C}^1$.	On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale, justifiée ultérieurement dans la section « Intégration ».

Convexité – COURS SEULEMENT

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x,y)\in I^2$ et $\lambda\in[0,1]$, $f((1-\lambda)x+\lambda y)\leqslant(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$.	Interprétation géométrique.
Inégalité de Jensen : si f est une fonction convexe sur un intervalle I, on a l'inégalité $$f\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$ quels que soient les réels positifs $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ de somme 1 et quels que soient les éléments $x_1,\dots,x_n$ de I.	Tout développement général sur les barycentres est hors programme.
Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes.	
Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes.	
b) Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables	
Caractérisation des fonctions convexes dérivables.	
Position du graphe d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes.	
Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.	

Au programme :

- cours de dérivation et convexité
- exercices sur la dérivabilité

Exemples de questions de cours

1. Formule de Leibniz
2. Dérivabilité d'une composée
3. Dérivabilité d'une bijection réciproque
4. CN d'extremum local + théorème de Rolle
5. Théorème de Rolle + Théorème des accroissements finis
6. Théorème et inégalité des accroissements finis
7. Théorème de la limite de la dérivée
8. Lien entre dérivée et sens de variations

9. Une fonction est convexe ssi elle vérifie l'inégalité des pentes
10. Une fonction est convexe ssi elle vérifie la fonction « pente en un point » est croissante
11. Continuité, dérivabilité à droite/gauche des fonctions convexes
12. Caractérisation des fonctions convexes dérivables