DM10
Pour le lundi 22/01

Le Problème 1 (commençable lundi, il faut le théorème des accroissements finis que l'on verra lundi seulement) est obligatoire. Les deux autres sont facultatifs. Merci de préciser en début de copie les problèmes que vous faites.
Le Problème 2 est un petit problème d'algèbre, le Problème 3 est un gros problème d'analyse.

Problème 1. Méthode de Newton

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$. On suppose que

- $f(a) > 0$
- $f(b) < 0$
- $\forall x \in [a, b], f'(x) < 0$.
- $\forall x \in [a, b], f''(x) > 0$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]a, b[$, que l'on notera c.

Correction

f est continue sur $[a, b]$, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, et f est strictement décroissante sur $[a, b]$ car sa dérivée y est strictement négative. Donc, d'après le théorème de la bijection (ou le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones), l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution dans $]a, b[$.

On définit maintenant, pour tout x de $[a, b]$, $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

2. Montrer que g est $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$, et déterminer les variations de g.

Correction

On suppose que f' ne s'annule pas sur $[a, b]$ donc g est bien définie et $\mathscr{C}^1$ par les théorèmes généraux. Sa dérivée est alors, pour tout x de $[a, b]$,

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f(x)^2}.$$

Or, $\forall x \in [a, b]$, $\dfrac{f''(x)}{f(x)^2} > 0$, et f change de signe une fois en c. On en déduit que g est croissante sur $[a, c]$ et décroissante sur $[c, b]$.

3. Montrer qu'il existe trois réels m, m' et M strictement positifs tels que pour tout x de $[a, b]$, on ait

$$m \leqslant |f'(x)| \leqslant m' \text{ et } |f''(x)| \leqslant M.$$

Correction

f est $\mathscr{C}^2$ donc f' et f'' sont continues sur $[a, b]$, donc $|f'|$ et $|f''|$ sont continues sur $[a, b]$, donc elles sont bornées et atteignent leurs bornes.
Posons $m = \min\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ et $M = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$. Alors on dispose de α et β dans $[a, b]$ tels que $m = |f'(\alpha)|$ et $M = |f''(\beta)|$. En particulier, comme f' et f'' ne s'annulent pas sur $[a, b]$, m et M sont non nuls.
Remarque : on a mieux en fait, car f'' est strictement positive, donc f' est strictement croissante. Donc : $\forall x \in [a, b],\ f'(x) \leqslant f'(b) \leqslant 0$ donc $\forall x \in [a, b],\ |f'(b)| \leqslant |f'(x)| \leqslant |f'(a)|$.

4. En appliquant convenablement le théorème des accroissements finis, d'abord à g puis à f, montrer qu'il existe $\mu > 0$ tel que

$$\forall x \in [a, b],\ |g(x) - c| \leqslant \mu|x - c|^2.$$

Correction

Soit x dans $[a, b]$, $x \neq c$ (sinon l'égalité est évidente). Par le théorème des accroissements finis, appliqués à g, on sait qu'il existe α entre x et c tel que

$$g(x) - g(c) = g'(\alpha)(x - c),$$

et donc, comme $g(c) = c$,

$$|g(x) - c| \leqslant |g'(\alpha)||x - c|.$$

Or,

$$|g'(\alpha)| = \left|\frac{f''(\alpha)}{(f'(\alpha))^2}\right| |f(\alpha)|$$

Or, $|f'(\alpha)| \geqslant m > 0$ et $|f''(\alpha)| \leqslant M$. Donc

$$|g'(\alpha)| \leqslant \frac{M}{m^2}|f(\alpha)|.$$

Ensuite, par le théorème des accroissements finis appliqué à f entre α et c, il existe β entre α et c tel que

$$|f(\alpha) - f(c)| = |f'(\beta)||\alpha - c|.$$

Or, $f(c) = 0$ et $|f'(\beta)| \leqslant A$ où $A = \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ (qui existe car f' est continue), donc

$$|f(\alpha) - f(c)| \leqslant A|\alpha - c| \leqslant A|x - c|,$$

car α est entre x et c. Donc, finalement, en posant $\mu = \dfrac{M}{m^2}A$,

$$|g(x) - c| \leqslant \mu|x - c|^2.$$

5. On se propose donc de construire une suite approchant c. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = g(u_n). \end{cases}$$

(a) Illustrer la construction de la suite, en plaçant sur un même graphe $\boxed{\text{la courbe de } f}$ et les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (attention, je parle bien de la courbe de f, **pas** de la courbe de g !)

Correction

On remarque que u_{n+1} est le point d'intersection de la tangente à la courbe de f en u_n et l'axe des abscisses !

(b) Montrer que u_n est croissante, majorée par c et qu'elle converge vers c.

Correction

Montrons que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant c$. **Initialisation.** $u_0 = a \leqslant c$, et $u_1 = g(u_0)$, donc, par l'étude des variations de g, $u_1 \leqslant c$. De plus, comme $u_0 = a$, $u_1 = u_0 - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$. Comme $f(a) > 0$ et $f'(a) < 0$, $u_1 > u_0$. D'où l'initialisation.
Hérédité. Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant c$. Alors

$$u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n = -\frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$

Or $f(u_n) \geqslant 0$ car $u_n \leqslant c$ et $f'(u_n) > 0$, donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. De plus, g est croissante sur $[a, c]$, décroissante sur $[c, b]$, de maximum atteint en c et égal à $g(c) = c$. Donc $g(u_n) \leqslant c$, i.e. $u_{n+1} \leqslant c$. Donc $u_0 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant c$.
Croissante et majorée, (u_n) converge. Notons ℓ sa limite. Par continuité de g, ℓ vérifie $g(\ell) = \ell$, i.e. $\ell - \dfrac{f(\ell)}{f'(\ell)} = \ell$, i.e. $f(\ell) = 0$. Or f s'annule en un unique point, donc $\ell = c$.

6. Démontrer même qu'il existe $K > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - c| \leqslant K\left(\frac{|u_0 - c|}{K}\right)^{2^n}.$$

Quelle information supplémentaire cela donne-t-il quant à la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers c ?

Correction

On sait que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - c| = |g(u_n) - c| \leqslant \mu |u_n - c|^2.$$

[Au brouillon, on remarque qu'on a alors

$$|u_{n+1} - c| = |g(u_n) - c| \leqslant \mu |u_n - c|^2 \leqslant \mu \times \mu^2 \times |u_{n-1} - c|^4.$$

en poursuivant ainsi, on trouve une proposition à démontrer par récurrence.]
Démontrons par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$|u_n - c| \leqslant \mu^{\sum_{k=0}^{n} 2^k} |u_0 - c|^{2^n} = \mu^{2^n - 1} |u_0 - c|^{2^n}$$

L'initialisation est évidente. Pour l'**hérédité**, soit n dans $\mathbb{N}$ tel que $|u_n - c| \leqslant \mu^{\sum_{k=0}^{n} 2^k} |u_0 - c|^{2^n}$. Alors

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - c| &= |g(u_n) - c| \\ &\leqslant \mu |u_n - c|^2 \\ &\leqslant \mu \times \left(\mu^{2^n - 1} |u_0 - c|^{2^n}\right)^2 = \mu \times \mu^{2^{n+1} - 2} |u_0 - c|^{2^{n+1}} = \mu^{2^{n+1} - 1} |u_0 - c|^{2^{n+1}}, \end{aligned}$$

d'où l'hérédité et le résultat.
D'où le résultat voulu, en posant $K = \dfrac{1}{\mu}$.
Ceci signifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **très rapidement** vers c (car, si $\rho \in]0, 1[$, ρ^{2^n} converge très rapidement vers 0, bien plus qu'une suite géométrique).

Problème 2. Puissances d'un k-cycle

1. Dans $\mathcal{S}_5$, donner la décomposition en cycles à supports disjoints de ρ, ρ^2, ρ^3, lorsque $\rho = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, puis lorsque $\rho = (1\ 2\ 3\ 4)$.

Correction

On remarque que
- si $\rho = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $\rho^2 = (1\ 3\ 5\ 2\ 4)$ et $\rho^3 = (1\ 4\ 2\ 5\ 3)$,
- si $\rho = (1\ 2\ 3\ 4)$, $\rho^2 = (1\ 3) \circ (2\ 4)$ et $\rho^3 = (1\ 4\ 3\ 2)$.

On va en fait démontrer un résultat plus général : si σ est un k-cycle (avec $k \in [\![2, n]\!]$), si $d \in [\![1, n]\!]$, alors pour tout $d \geqslant 1$, σ^d se décompose en $k \wedge d$ cycles à supports disjoints, de longueur $\dfrac{k}{k \wedge d}$.
Dans un premier temps, **on suppose** $k = n$. Soit σ est un n-cycle, et $d \in [\![1, n]\!]$. Notons $\rho = \sigma^d$.

2. Démontrer que pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $\{k \in \mathbb{Z},\ \sigma^k(i) = i\} = n\mathbb{Z}$.

Correction

Soit i dans $[\![1, n]\!]$. Notons $G_i = \{k \in \mathbb{Z},\ \sigma^k(i) = i\}$.
Alors on remarque que $\sigma^0(i) = i$ et que pour tous $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$, $\sigma^{k-\ell}(i) = \sigma^k(\sigma^{-\ell}(i)) = i$, car $\sigma^\ell(i) = i$ donc, en composant par $\sigma^{-\ell}$, $i = \sigma^{-\ell}(i)$.
$\boxed{\text{Donc } G_i \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{Z}, +).}$ Donc on dispose de $a \in \mathbb{N}$ tel que $G_i = a\mathbb{Z}$. (**il faut redémontrer cette propriété de cours !**)
De plus, $G_i \neq \{0\}$ donc $a > 0$. Ensuite, $\sigma^n = \mathrm{Id}$ (car σ est un n-cycle), donc a divise n. Ensuite, si on écrit $\sigma = (a_1\ a_2\ \dots\ a_n)$ avec $a_1 = i$, alors pour tout $k < n$, $\sigma^k(i) = a_{1+k} \neq i$, donc $a \geqslant n$. Donc, finalement $\boxed{a = n}$ et $G_i = n\mathbb{Z}$.

3. En déduire que pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $\{k \in \mathbb{Z},\ \rho^k(i) = i\} = \left(\dfrac{n}{n \wedge d}\right)\mathbb{Z}$.

Correction

Déjà, de la même manière que précédemment, si on note $H_i = \{k \in \mathbb{Z},\ \rho^k(i) = i\}$, H_i est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ donc est de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{N}$.
Ensuite, si $k \in \mathbb{Z}$, on a l'équivalence suivante :

$$\rho^k(i) = i \Leftrightarrow \sigma^{dk}(i) = i \Leftrightarrow dk \in G_i \Leftrightarrow n \text{ divise } dk.$$

Or, on a l'équivalence suivante :

$$n \text{ divise } dk \Leftrightarrow \frac{n}{n \wedge d} \text{ divise } \frac{d}{n \wedge d} k \Leftrightarrow \frac{n}{n \wedge d} \text{ divise } k,$$

la dernière équivalence étant due au théorème de Gauss. D'où $H_i = \left(\dfrac{n}{n \wedge d}\right)\mathbb{Z}$.

4. En déduire que σ^d se décompose en $n \wedge d$ cycles à supports disjoints, de longueur $\dfrac{n}{n \wedge d}$.

Correction

On peut raisonner de proche en proche, en partant de 1, en regardant tous les éléments $\rho(1), \rho^2(1), \dots$ jusqu'à $\rho^{\frac{n}{n\wedge d}-1}(1)$, puis recommencer... Mais on peut faire plus court avec le langage des classes d'équivalence !
Définissons $\sim$ sur $[\![1,n]\!]$ par $i \sim j \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ j = \rho^k(i)$.
Alors cette relation est clairement une relation d'équivalence et, pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, la classe d'équivalence de i est égale au cardinal de $\{\rho^k(i), k \in \mathbb{Z}\}$. Par la question précédente, ce cardinal est de $\dfrac{n}{n\wedge d}$.
Or, chaque classe d'équivalence modulo $|sim$ correspond à un cycle intervenant dans la décomposition de ρ en cycles à supports disjoints.
Tous les cycles de la décomposition de ρ en produit de cycles à supports disjoints sont de longueur $\boxed{\dfrac{n}{n\wedge d}}$: il y en a exactement $\boxed{\dfrac{n}{\frac{n}{n\wedge d}} = n \wedge d}$.

5. Peut-on généraliser à σ un k-cycle quelconque (avec k différent de n) ?

Correction

Oui, car si σ est un k-cycle quelconque, disons $\sigma = (a_1\ \dots\ a_k)$, on peut considérer la permutation de l'ensemble à k éléments $\{a_1, \dots, a_k\}$, γ, définie par $\gamma(a_i) = \sigma(a_i)$. Cette permutation est un k-cycle dans un ensemble à k éléments donc, comme tout ensemble à k éléments est en bijection avec $[\![1,k]\!]$, cette permutation est un k-cycle dans $\mathcal{S}_k$, donc le résultat précédent s'applique !

Problème 3. Fonctions absolument monotones

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$ et f une fonction de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a,b[$.
f est dite absolument monotone (en abrégé AM) si : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]a,b\Big[, f^{(n)}(x) \geqslant 0$.
f est dite complètement monotone (en abrégé CM) si : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]a,b\Big[, (-1)^n f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

A. Premières questions

1. Soient f et g deux fonctions AM définies sur $]a,b[$. Montrer que $f+g$ et $f \times g$ sont AM. Qu'en est-il si f et g sont des fonctions CM ?

2. Soient $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ et $g :]-b,-a[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(-x)$. Montrer que f est AM sur $]a,b[$ si et seulement si g est CM sur $]-b,-a[$.

Étudions maintenant quelques exemples.

3. Vérifier que la fonction $-\ln$ est CM sur $]0,1[$.

4. Démontrer que la fonction tan est AM sur $]0, \dfrac{\pi}{2}[$.

Si jamais nous n'avons pas eu le temps de les faire en cours, voici 2 résultats :

- si f est dérivable sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$, continue en a, si $f'(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

- si f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$, continue en a, si pour tout k, $f^{(k)}(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_k$, alors f est $\mathscr{C}^\infty$ sur I et pour tout k, $f^{(k)}(a) = \ell_k$ (à utiliser comme « théorème du prolongement du caractère $\mathscr{C}^\infty$ »

5. On suppose dans cette question que $a \in \mathbb{R}(a \neq -\infty)$ et f est AM sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$tel que $\ell = \lim\limits_{a^+} f$.

6. On prolonge f en posant $f(a) = \ell$. Montrer que f est dérivable à droite en a, et que f' est continue à droite en a.

7. Plus généralement, montrer que f est infiniment dérivable à droite en a avec des dérivées positives ou nulles.

8. Montrer qu'il ne se passe pas la même chose en b.

B. Formule de Taylor

On suppose ici que $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit f absolument monotone sur $]a, b[$. On pose $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$ et $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$

9. Démontrer que $R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) du$.

10. Démontrer que la fonction $x \to \frac{R_n(x)}{x^n}$ est croissante sur $]0, b[$.

11. Démontrer que $\forall x \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}, S_n(x) \leqslant f(x)$, puis que la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On note $g(x)$ sa limite.

12. Démontrer que $f(x) = g(x)$.