N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

# DM-COURS 11
## Pour le lundi 29 janvier

Le but de ce DM est de vous introduire aux méthodes d'étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$. Presque aucun résultat n'est au programme officiel (seulement celui sur la convergence vers un point fixe de $f$ dans le cas où elle est continue). Un complément intéressant à ce DM est le poly de cours 13, disponible sur cahier-de-prépa. Il n'est pas nécessaire.

### Conseils et instructions pour ce DM

- Certaines questions sont démontrées explicitement dans le poly de cours ou ont déjà été démontrées en classe : je ne les corrigerai pas.
- Faire au moins deux questions parmi les 5,6,7 (30 minutes par suite).
- Regarder la question 8 obligatoirement (utilisation du TAF).
- La fin est optionnelle.

**1.** Démontrer la

**Proposition 1**

Soient $\mathrm{I}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie sur $\mathrm{I}$.
Si $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$ , on peut définir une suite par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

**2.** Démontrer la

**Proposition 2 (Seule proposition au programme)**

Soit $\mathrm{I}$ un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** vérifiant $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$.
On considère une suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$ Alors *si* $(u_n)_n$ converge **vers** $\ell \in \mathbf{I}$, *alors* $f(\ell) = \ell$.

**3.** Démontrer que si $f$ est croissante sur $\mathrm{I}$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Illustrer sur un dessin.

**4.** Démontrer que si $f$ est décroissante sur $\mathrm{I}$, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, de monotonies opposées. Illustrer sur un dessin.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

On donne alors le point de méthode suivant.

**Point de méthode 3**

Plan d'étude d'une suite vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f$ est une application continue.

- Etudier $f$ : étudier ses variations ; déterminer ses points fixes et le signe de $x \mapsto f(x) - x$. Récapituler ces résultats **dans un tableau unique** .
- Déterminer à l'aide du tableau précédent un intervalle stable par $f$ contenant $u_0$.
- Placer $u_n$ par rapport aux points fixes.
- Sens de variations de $(u_n)_n$ : $\forall n \quad u_{n+1} - u_n = (f - \mathrm{Id})(u_n)$ de signe déjà étudié. Remarque : si $f$ est croissante, en général $(u_n)_n$ est monotone.
- Conclure : les calculs précédents montrent que la suite converge (croissante et majorée, décroissante et minorée). auquel cas la limite est un point fixe de $f$, ou au contraire tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ (croissante non majorée ou décroissante non minorée).

**5.** Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \quad u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n^2}{2}$.
On sera amenés à distinguer les cas $u_0 \geqslant 1$, $u_0 \in [0, 1]$ puis $u_0 \leqslant 0$.

**6.** Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in ]0, 1[$ et $\forall n \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - 2u_n}$.

**7.** Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in ]0, 1[$ et $\forall n \quad u_{n+1} = \dfrac{2}{1 + u_n}$. On montrera que pour une telle suite $u_1 > 1$ et on étudiera séparément les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.

**Cas particulier d'une fonction dérivable.**

**8.** Démontrer que si $f$ possède un point fixe sur $\mathrm{I}$ (intervalle stable par $f$), $\ell$, si $f$ est dérivable sur $\mathrm{I}$, si $|f'|$ est bornée par $k \in ]0, 1[$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$ converge vers $\ell$.

**Considérations plus théoriques.** Soit $f$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que $f$ admet un point fixe attractif $x_0$, c'est-à-dire qu'il vérifie

$$f(x_0) = x_0 \qquad \text{et} \qquad |f'(x_0)| < 1$$

**9.** (a) Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ et un réel $k \in ]0, 1[$ tel que la restriction de $f$ à $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ soit $k$-lipschitzienne.

(b) En déduire que suite $\begin{cases} u_0 \in ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[ \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$ converge vers $x_0$.

On suppose désormais que $f$ admet un point fixe répulsif $x_0$, c'est-à-dire qu'il vérifie

$$f(x_0) = x_0 \qquad \text{et} \qquad |f'(x_0)| > 1$$

**10.** Démontrer que si la suite $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$ converge vers $x_0$, alors elle est stationnaire.