MPSI1 – Programme de colles
Semaine 16 – du 29 janvier au 2 février 2024

Convexité

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x,y) \in I^2$ et $\lambda \in [0,1]$, $f((1-\lambda)x+\lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$.	Interprétation géométrique.
Inégalité de Jensen : si f est une fonction convexe sur un intervalle I, on a l'inégalité $$f\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$ quels que soient les réels positifs $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ de somme 1 et quels que soient les éléments $x_1,\dots,x_n$ de I.	Tout développement général sur les barycentres est hors programme.
Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes.	
Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes.	
b) Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables	
Caractérisation des fonctions convexes dérivables.	
Position du graphe d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes.	
Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.	

Calcul matriciel et systèmes linéaires – COURS UNIQUEMENT

Le but de cette section est de présenter une initiation au calcul matriciel. Ainsi, on prépare l'étude géométrique de l'algèbre linéaire menée au second semestre, on revient sur l'étude des systèmes linéaires et on obtient des exemples fondamentaux d'anneaux.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Opérations sur les matrices	
Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.	
Matrices élémentaires.	Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
Produit matriciel ; bilinéarité, associativité.	Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.
Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.
Transposée d'une matrice.	Notation $A^\top$.
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.	
Trace, propriétés.	Expression de $\mathrm{Tr}(A^\top B)$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
e) Anneau des matrices carrées	
Anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	Non commutativité si $n \geqslant 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.
Matrice identité, matrice scalaire.	Notation I_n.
Matrices symétriques, antisymétriques.	Notations $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
Formule du binôme.	Application au calcul de puissances.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	
Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Inverse d'une transposée.	
Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.	

Au programme :

— cours de convexité et matrices

— exercices sur la convexité (et révisions d'analyse)

Exemples de questions de cours

1. Une fonction est convexe ssi elle vérifie l'inégalité des pentes
2. Une fonction est convexe ssi elle vérifie la fonction « pente en un point » est croissante
3. Continuité, dérivabilité à droite/gauche des fonctions convexes
4. Caractérisation des fonctions convexes dérivables
5. Inégalité de Jensen

6. « Associativité » du produit matriciel ; « neutre » pour $\times$ (je mets entre guillemets car la proposition vaut pour des matrices non carrées)
7. Inversibilité d'une matrice 2×2.
8. Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: description, expression des coefficients, décomposition d'une matrice sur la base canonique produit de deux matrices $E_{a,b}^{(n,p)} \times E_{c,d}^{(p,q)}$.
9. Transposée : définition, $(AB)^\top$.
10. Décomposition d'une matrice comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
11. Trace : définition, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$
12. Si A et B sont dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, expression de $\mathrm{Tr}(A^\top B)$; dans le cas réel, $\mathrm{Tr}(A^\top A) = 0 \Rightarrow A = 0_{n,p}$.