

Chapitre 14 Matrices

1 Définitions et opérations sur les matrices

1.1 Définitions

Définition 1

1. Une *matrice* à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un élément A de $\mathbb{K}^{np}$. On présente cet élément sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note aussi $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$. Les a_{ij} sont appelés coefficients de A .

2. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la matrice

$$L_i = (a_{i1} \ \cdots \ a_{ip})$$

est appelée i -ème ligne de A .

Pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la matrice

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

est appelée j -ème colonne de A .

3. L'ensemble des matrices à n lignes et à p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
4. Les éléments de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ sont appelés vecteurs (ou matrices) lignes ; ceux de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont appelés vecteurs (ou matrices) colonnes.
5. Dans le cas où $n = p$, on note simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et on parle de matrices carrées. Pour $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la *diagonale* de A est le n -uplet $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

Exemple 2

1. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
2. Si $B = \begin{pmatrix} 1 & e^{\frac{i\pi}{3}} \\ -i & 2 + 3i \end{pmatrix}$, $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

3. Si on définit $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2, c_{ij} = i + j,$$

$$\text{alors } C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Représenter la matrice $D = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq 5}$ définie par, pour tout (i, j) dans $\llbracket 1, 5 \rrbracket^2$, $d_{ij} = \begin{pmatrix} j-1 \\ i-1 \end{pmatrix}$.

Remarque 4

De nombreuses conventions aident à mieux manipuler les matrices

- La notation en tableau plutôt qu'en bête np -uplet.
- L'utilisation de i pour les lignes, de j pour les colonnes.
- L'utilisation de coefficients ayant la même lettre que la matrice : on écrira $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}}$,
 $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}}$, etc.
- On écrira parfois $[A]_{ij}$ pour désigner le coefficient $i - j$ de A .
- On identifie $\mathcal{M}_{11}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$.

Définition 5 (Matrices particulières)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On dit que A est triangulaire supérieure si $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$. On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.
2. On dit que A est triangulaire inférieure si $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$. On note $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.
3. On dit que A est diagonale si $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$. On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales.
4. On dit que A est scalaire si elle est diagonale et s'il existe λ telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{ii} = \lambda$.
5. On nomme matrice identité, et on note I_n la matrice constituée uniquement de 1 :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 6

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.
2. $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

Définition 7 (Un symbole utile : le symbole de Kronecker)

Si $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, on définit $\delta_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exemple 8

1. $\delta_{0,2} = 0$, $\delta_{1,1} = 1$.
2. Ainsi, el terme général de I_n est $(\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.
3. Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Alors, si $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\sum_{i=1}^n \delta_{ik} x_i = x_k.$$

4. En particulier, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$\sum_{i=1}^n \delta_{ik} \delta_{i\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq \ell \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} = \delta_{k\ell}.$$

1.2 Addition et multiplication par un scalaire

On va donner à l'ensemble des matrices une structure de groupe.

Définition 9

1. On définit pour deux matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la somme $A + B$ et B par

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}.$$

Autrement dit,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1p} + b_{1p} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2p} + b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix}$$

2. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit la matrice λA par $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, c'est-à-dire

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1p} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}$$

Proposition 10 (et def)

1. Si l'on note $0_{np} = (0)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, alors pour toute A dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$.
2. $+$ est commutative.
3. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A + (-A) = 0_{n,p}$.
4. $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ et $(\lambda\mu).A = \lambda.(\mu A)$.
5. $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ sont stables par $+$ et par multiplication par un scalaire.

Définition 11 (Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)

Soit $a \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $b \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On définit $E_{a,b}$ comme la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient de la ligne a et de la colonne b qui est égal à 1. Plus précisément, si $E_{a,b} = (e_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, alors

$$e_{ij} = \delta_{ai}\delta_{bj}.$$

Remarque 12

Il faut avoir précisé n et p pour parler de $E_{a,b}$.

Exemple 13

1. si $n = 3$ et $p = 4$,

$$E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{4,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. en revanche, si $n = 2$ et $p = 2$,

$$E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 14

Soit $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors

$$M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p m_{ij} E_{ij}$$

Exemple 15

Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors

$$M = 1.E_{11} + 7.E_{12} + 8.E_{21} + 2.E_{22} + 1.E_{32}$$

Remarque 16

C'est pour cela que l'on parle de **base canonique** : elle sert à décomposer toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1.3 Produit de matrices – anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Si on choisit la notation sous forme de tableaux pour les matrices, c'est notamment pour pouvoir en faire le produit ! Dans la section q désignera aussi un entier strictement positif.

Définition 17 (Produit de deux matrices)

Soient A dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et B dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le produit de A par B , noté $A \times B$ ou AB , est la matrice $C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}}$ de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}.$$

Remarque 18

1. Deux choses sont à apprendre : la formule (il faut vraiment la connaître par coeur!), et la manière « concrète » de faire un produit matriciel.
2. Avec la notation des coefficients sous la forme $[A]_{ij}$, on a

$$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^n [A]_{ik} [B]_{kj}$$

Point de méthode 19

Comment faire un produit de deux matrices ?

- (i) En plaçant les matrices comme pour faire un tableau à double entrée.
- (ii) En prenant la première ligne, en la mettant verticalement, et en la faisant rencontrer les colonnes de la seconde matrice.

Remarque 20

A priori on ne peut pas commuter un produit de matrices : les formats ne sont même pas compatibles !

Et même lorsque les formats sont les mêmes ! Contre-exemple avec $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exemple 21 (Deux applications importantes du produit matriciel)

1. Réécriture de systèmes linéaires : si $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, alors l'équation $AX = b$ s'écrit

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 1 \\ 2x - z = 0 \\ 4x + 5y - 2z = -3 \end{cases}$$

Ainsi, tout système linéaire est interprétable matriciellement.

2. Suites récurrentes linéaires. Si pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+2} + 2u_{n+1} - u_n = 0$, alors, si on pose $V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$,

$$V_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ -2u_{n+1} + u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

donc $V_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} V_n$. Donc

$$V_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^n V_0.$$

Proposition 22 (Propriétés du produit)

n, p, q, r désignent quatre entiers non nuls.

1. (associativité) Pour toutes matrices A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, B de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et C de $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $A(BC) = (AB)C$.
2. (distributivité) Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, C et D de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $A(C+D) = AC + AD$ et $(A+B)C = AC + BC$.
3. (comportement avec les scalaires) Pour toutes matrices A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, B de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, λ et μ éléments de $\mathbb{K}$, $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
4. (élément neutre) $I_n A = A$ et $A I_p = A$.

Démonstration

Déjà, chaque produit est bien défini : $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, donc $(AB)C \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$. De même, $BC \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ donc $A(BC) \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$.

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket$. Alors

$$\begin{aligned} [(AB)C]_{ij} &= \sum_{k=1}^q [AB]_{ik} [C]_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^q \sum_{\ell=1}^p [A]_{i\ell} [B]_{\ell k} [C]_{kj} \\ &= \sum_{\ell=1}^p \sum_{k=1}^q [A]_{i\ell} [B]_{\ell k} [C]_{kj} \\ &= \sum_{\ell=1}^p [A]_{i\ell} \sum_{k=1}^q [B]_{\ell k} [C]_{kj} \\ &= \sum_{\ell=1}^p [A]_{i\ell} [BC]_{\ell j} \\ &= [A(BC)]_{ij}, \end{aligned}$$

d'où l'égalité des coefficients, donc des matrices. ■

Proposition 23

L'ensemble $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau non commutatif, de neutre pour $+$ 0_n et de neutre pour $\times$ I_n . On notera alors $A^n = A \times A \times \cdots \times A$.

Remarque 24

Attention ! $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède des diviseurs de 0 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition 25

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0_n$.

Comme dans tout anneau, on a la formule du binôme de Newton et de Bernoulli

Proposition 26

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $AB = BA$, alors pour tout k entier,

$$(A + B)^k = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} A^\ell B^{k-\ell} \text{ et } A^k - B^k = (A - B) \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} A^\ell B^{k-\ell} \right).$$

Remarque 27

Remarque importante : la distributivité de $\times$ permet de factoriser une somme de matrices. Ainsi,

$$A^2 + A \times B + 2A = A \times (A + B + 2I_n)$$

Attention ! On ne peut pas faire n'importe quoi ! Ainsi,

$$AB + BA$$

n'est pas factorisable par A .

Exercice 28

Calculer les puissances successives des matrices suivantes :

$$A = J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Proposition 29

$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ sont stables par $\times$ (ce sont des sous-anneaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).
De plus, si $(A, B) \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})^2$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})^2$ ou $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})^2$, alors les coefficients diagonaux de AB sont obtenus en faisant le produit des coefficients diagonaux de A et de B .

Démonstration

On ne fait la démonstration que pour $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Soient A et B dans $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Notons $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $AB = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Alors

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

- si $i > j$, alors

$$\text{— } \forall k \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket, k < i, \text{ donc } a_{ik} = 0, \text{ donc } \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{kj} = 0,$$

$$\text{— } \forall k \in \llbracket i, n \rrbracket, k > j \text{ donc } b_{kj} = 0, \text{ donc } \sum_{k=i}^n a_{ik} b_{kj} = 0.$$

Donc $c_{ij} = 0$.

- si $i = j$, alors

$$\text{— } \forall k \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket, k < i, \text{ donc } a_{ik} = 0, \text{ donc } \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{ki} = 0,$$

$$\text{— } \forall k \in \llbracket i+1, n \rrbracket, k > i \text{ donc } b_{kj} = 0, \text{ donc } \sum_{k=i}^n a_{ik} b_{ki} = 0.$$

Donc $c_{ii} = a_{ii} b_{ii}$.

D'où le résultat désiré! ■

Proposition 30 (Produits d'éléments de la base canonique)

On note, pour cette proposition $E_{a,b}^{(n,p)}$ la matrice de la base canonique de taille (n, p) , dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient (a, b) . Alors

$$E_{a,b}^{(n,p)} \times E_{c,d}^{(p,q)} = \delta_{bc} E_{a,d}^{(n,q)}.$$

Démonstration

On écrit $E_{a,b}^{(n,p)} = (\delta_{ia}\delta_{jb})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $E_{c,d}^{(p,q)} = (\delta_{ic}\delta_{jd})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$, d'où, si $E_{a,b}^{(n,p)} \times E_{c,d}^{(p,q)} = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, on a

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \sum_{k=1}^n \delta_{ia} \delta_{kb} \delta_{kc} \delta_{jd} \\ &= \delta_{ia} \delta_{jd} \sum_{k=1}^n \delta_{kb} \delta_{kc} \\ &= \delta_{ia} \delta_{jd} \delta_{bc} \end{aligned}$$

Donc

$$(m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \delta_{bc} (\delta_{ia} \delta_{jd})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}},$$

i.e.

$$E_{a,b}^{(n,p)} \times E_{c,d}^{(p,q)} = \delta_{bc} E_{a,d}^{(n,q)}.$$

■

On donne enfin une autre formule **TRÈS IMPORTANTE** : le produit par blocs

Proposition 31

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, avec

$$A = \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} V & W \\ X & Y \end{pmatrix},$$

où $R \in \mathcal{M}_{a,b}(\mathbb{K})$, $S \in \mathcal{M}_{a,c}(\mathbb{K})$, $T \in \mathcal{M}_{d,b}(\mathbb{K})$ et $U \in \mathcal{M}_{d,c}(\mathbb{K})$, et où $V \in \mathcal{M}_{b,e}(\mathbb{K})$, $W \in \mathcal{M}_{b,f}(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{c,e}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{c,f}(\mathbb{K})$, alors

$$AB = \begin{pmatrix} EV + SX & RW + SY \\ TV + UX & TW + UY \end{pmatrix}.$$

En particulier, si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, avec $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A et si $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, avec $C_1, \dots, C_q$ les colonnes de B ,

$$A \times B = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \times B = \begin{pmatrix} L_1 \times B \\ \vdots \\ L_n \times B \end{pmatrix}$$

et

$$A \times B = A \times (C_1 \ C_2 \ \dots \ C_q) = (AC_1 \ AC_2 \ \dots \ AC_q).$$

Remarque 32

On ne va pas démontrer la propriété précédente, mais sachez la mettre en application, en faisant un produit de deux matrices 3×3 par exemple !

Définition 33

Les éléments inversibles (pour $\times$) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont appelées matrices inversibles. On appelle leur ensemble groupe linéaire et on le note $GL_n(\mathbb{K})$.

Proposition 34 (Admise pour le moment !)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors les ASSE :

1. A admet un inverse à gauche (i.e. $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), B \times A = I_n$)
2. A admet un inverse à droite (i.e. $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A \times B = I_n$)
3. $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

Remarque 35

C'est une propriété très forte ! Je vous rappelle qu'on a vu, dans le chapitre sur les applications, que l'on pouvait avoir $f \circ g = \text{Id}_E$ sans pour autant que f ou g soient bijectives.

Proposition 36

Soient A et B deux matrices de $GL_n(\mathbb{K})$. Alors

- (i) $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$ et $I_n^{-1} = I_n$.
- (ii) A^{-1} est inversible d'inverse A .
- (iii) AB est inversible d'inverse $B^{-1}A^{-1}$
- (iv) Pour tout entier naturel k , $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

Exercice 37

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 + A$, en déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Proposition 38

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

1.4 Transposition

Définition 39

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La transposée de A , notée tA ou A^T , est la matrice B de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dont les coefficients $(b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ sont définis par

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

Exemple 40

- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -8 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, alors $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.
- Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors $X^T \times X = (x \ y \ z) \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$. On reconnaît alors le produit scalaire des deux vecteurs X et X' .

Proposition 41

Soient A et A' deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, B dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors

- (i) $(A^T)^T = A$
- (ii) $(\lambda A + \mu A')^T = \lambda A^T + \mu A'^T$.
- (iii) $(AB)^T = B^T A^T$.
- (iv) si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, A^T est inversible, d'inverse $(A^{-1})^T$.

Démonstration

- Évident.
- Pour vous.
- Calculons le coefficient (i, j) de chaque matrice. Déjà les formats coïncident : $(AB)^T$ et $B^T A^T$

sont toutes deux dans $\mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, q \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors

$$\begin{aligned} [(AB)^T]_{ij} &= [AB]_{ji} \\ &= \sum_{k=1}^p [A]_{j,k} [B]_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^p [A^T]_{k,j} [B^T]_{i,k} \\ &= \sum_{k=1}^p [B^T]_{i,k} [A^T]_{k,j} \\ &= [B^T A^T]_{ij}, \end{aligned}$$

d'où l'égalité des deux matrices.

4. Calculons

$$A^T \times (A^{-1})^T = (A^{-1} \times A)^T = I_n^T = I_n,$$

et

$$(A^{-1})^T \times A^T = (A \times A^{-1})^T = I_n^T = I_n,$$

donc A^T est inversible, d'inverse $(A^{-1})^T$.

■

Remarque 42

Remarque : $A \mapsto A^T$ réalise une bijection de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

Définition 43

1. Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite symétrique si $A^T = A$, antisymétrique si $A^T = -A$.
2. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Exemple 44

1. Les matrices diagonales sont toutes symétriques.
2. Une matrice antisymétrique a nécessairement ses coefficients diagonaux nuls : $[A]_{ii} = -[A]_{ii}$.

Remarque 45

Combien faut-il de coefficients pour coder une matrice symétrique ? $\frac{n(n+1)}{2}$, le nombre de coefficients diagonaux et au-dessus de la diagonale.

Combien faut-il de coefficients pour coder une matrice antisymétrique ? $\frac{n(n-1)}{2}$, le nombre de coefficients strictement au-dessus de la diagonale.
On remarque que la somme des deux fait n^2 , i.e. le nombre de coefficients nécessaires à coder une matrice quelconque. C'est très intéressant et ceci prendra tout son sens dans le chapitre d'algèbre linéaire !

Proposition 46

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors il existe un unique couple (S, A) dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = S + A$.

Démonstration

On va raisonner par analyse-synthèse.

Analyse. Soit (S, A) dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = S + A$. Alors

$$\begin{cases} M = S + A \\ M^T = S^T + A^T = S - A \end{cases}$$

Ainsi, en sommant et en soustrayant les deux lignes, $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$. D'où l'unicité.

Synthèse. Posons $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$. Alors

- $S^T = \frac{1}{2}(M^T + (M^T)^T) = \frac{1}{2}(M^T + M) = S$, donc $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$,
- $A^T = \frac{1}{2}(M^T - (M^T)^T) = \frac{1}{2}(M^T - M) = -A$, donc $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$,
- $S + A = \frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M - M^T) = M$,

d'où l'existence ! ■

Exercice 47

Effectuer la décomposition « symétrique + antisymétrique » de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

1.5 Trace

Définition 48

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

On appelle trace de A , et on note $\text{Tr}(A)$ l'élément de $\mathbb{K}$ défini par $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Exemple 49

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 0 & -3 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\text{Tr}(A) = 3$.

Proposition 50

1. (linéarité) $\forall (A, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \text{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{Tr}(A) + \mu \text{Tr}(B)$,
2. (comportement avec le produit) $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}), \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Démonstration

1. Pour vous.
2. On écrit

$$\begin{aligned} \text{Tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n [AB]_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p [A]_{ik} B_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^n [A]_{ik} B_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^p [BA]_{kk} \\ &= \text{Tr}(BA). \end{aligned}$$

■

Exercice 51

1. Quelles sont les solutions de l'équation $XY - YX = I_n$, où $(X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$?
2. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = PAP^{-1}$, alors $\text{Tr}(B) = \text{Tr}(A)$. La réciproque est-elle vraie ?

Proposition 52

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors

$$\text{Tr}(A^T A) = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$

Démonstration

Le sens réciproque est évident.

Pour le sens direct, notons $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$. Alors

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A^T A) &= \sum_{i=1}^p [A^T A]_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n [A^T]_{ik} [A]_{ki} \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{ki} \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n a_{ki}^2. \end{aligned}$$

Or, comme les (a_{ki}) sont réels, $a_{ki}^2 \geq 0$. Une somme de termes positifs est nulle si et seulement si chacun des termes est nul, donc $\text{Tr}(A^T A) = 0$ si et seulement si $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, a_{ij} = 0$. ■

Chapitre 14

Matrices – polycopié

2 Matrices et systèmes linéaires

2.1 Interprétation matricielle d'un système linéaire

Remarque 53

On rappelle qu'un système linéaire à n équations et p inconnues s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Ce système peut en fait s'écrire matriciellement : $AX = b$, où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Cela permet de donner la

Définition 54

Un *système linéaire* à n équations et p inconnues est la donnée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et d'un vecteur-colonne $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Une **solution** du système est un vecteur-colonne $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = b$.

Le vecteur-colonne b est le **second membre** du système. Si $b = 0$, on dit que le système est homogène.

Exercice 55

Soit le système linéaire

$$\begin{cases} x + 2y - z + t = 4 \\ 3x - 8y = 2 \\ 2t = -1 \end{cases}$$

Écrire ce système sous la forme $AX = b$.

Proposition 56

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $b \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'ensemble des solutions du système linéaire $AX = b$ est ou vide, ou de la forme

$$\{X_0 + X_h, X_h \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), AX_h = 0\}.$$

(« solution générale = solution particulière + solution générale de l'équation homogène »)

Proposition 57

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible ssi

$$\forall b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists ! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = b.$$

2.2 Matrices échelonnées et systèmes échelonnés

Définition 58 (Système échelonné)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $L_1, \dots, L_n$ les n lignes de A . On dit que A est échelonnée si chaque ligne a strictement + de coefficients nuls à gauche, ou bien est nulle.
Plus précisément, en notant $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A ,
 - (i) il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\forall i \leq k$, L_i n'est pas nulle et $\forall i > k$, L_i est nulle.
 - (ii) $\forall i < k$, $m(L_i) < m(L_{i+1})$,où $m(L_i)$ est l'indice du premier terme non nul de L_i .
2. Un système linéaire est dit échelonné si sa matrice est échelonnée.

Définition 59

Soient $X_1, X_2, \dots, X_k$ k vecteurs colonne. On définit l'ensemble $\text{Vect}(X_1, X_2, \dots, X_k)$ comme l'ensemble des combinaisons linéaires de $X_1, X_2, \dots, X_k$:

$$\text{Vect}(X_1, X_2, \dots, X_k) = \{\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_k X_k, (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k\}.$$

Proposition 60 (Solutions d'un système échelonné homogène)

Soit $AX = 0$ un système échelonné homogène à p inconnues et k lignes non nulles. Alors il existe $X_1, \dots, X_{p-k}$ $p - k$ vecteurs tels que l'ensemble des solutions soit $\text{Vect}(X_1, \dots, X_{p-k})$.

Démonstration

| Proposition admise. ■

Que se passe-t-il lorsque le système n'est pas homogène ?

Proposition 61 (Solutions d'un système échelonné inhomogène)

Soit $AX = B$ un système de n équations à p inconnues, tel que le système homogène associé soit échelonné, avec k lignes non nulles. Alors nécessairement $k \leq n$. De plus,

1. Si $k = n$, alors le système admet une unique solution.
2. Si $k < n$, alors les lignes dont la partie homogène est nulle définissent des *conditions de compatibilité*. Si elles ne sont pas vérifiées, le système n'a pas de solution. Si elles sont vérifiées, il existe une solution particulière X_0 de $\mathcal{M}_{p-k,1}(\mathbb{K})$ et $X_1, \dots, X_{p-k}$ $p - k$ vecteurs tels que l'ensemble des solutions soit $X_0 + \text{Vect}(X_1, \dots, X_{p-k})$.

Démonstration

Le cas $k = n$ sera traité très prochainement. ■

Remarque 62

Interprétation géométrique des équations de droites, de plans, et des recherches d'intersection.

Proposition 63

Soit A une matrice échelonnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est triangulaire supérieure.

Démonstration

Par récurrence, on montre que pour tout k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathcal{P}_k$: les $k - 1$ premiers termes de la ligne L_k sont nuls. ■

Rappel : résolvons un système échelonné.

Proposition 64

Soit $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si, et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls. Dans ce cas A^{-1} est aussi triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les inverses des coefficients diagonaux de A .

Démonstration

On démontre le résultat par récurrence sur n .

Initialisation. Toute matrice triangulaire supérieure de taille 1 est une matrice de la forme (a) avec $a \in \mathbb{K}$, inversible ssi $a \neq 0$. Dans ce cas, $(a)^{-1} = (a^{-1})$.

Hérédité. Supposons le résultat vrai pour un certain n dans $\mathbb{N}^*$. Soit A dans $\mathcal{T}_{n+1}(\mathbb{K})$. On peut écrire A sous la forme $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0_{1,n} & d \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $d \in \mathbb{K}$.

1. si A est inversible, alors on peut écrire son inverse sous la forme $\begin{pmatrix} B' & C' \\ L' & d' \end{pmatrix}$ où $B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $C' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $L' \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $d' \in \mathbb{K}$. On a alors

- $AA^{-1} = I_{n+1}$, donc, par produit par blocs, comme $\begin{pmatrix} B & C \\ 0_{1,n} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B' & C' \\ L' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix}$,

- $dd' = 1$ donc $d' \neq 0$ et $d' = \frac{1}{d}$,

- $dL' = 0_{1,n}$ donc $L' = 0_{1,n}$,

- $BB' + CL' = I_n$ donc $BB' = I_n$

- $A^{-1}A = I_{n+1}$, donc de Même, $B'B = I_n$, donc B est triangulaire supérieure inversible, donc tous ses coefficients diagonaux sont non nuls

Donc, comme $d \neq 0$, tous les coefficients diagonaux de A sont non nuls.

2. si A est à coefficients diagonaux non nuls, alors par hypothèse de récurrence, B est inversible. On pose alors

$$M = \begin{pmatrix} B^{-1} & -\frac{1}{d}B^{-1}C \\ 0_{1,n} & \frac{1}{d} \end{pmatrix},$$

et on vérifie aisément que $MA = AM = I_{n+1}$. Le fait que les coefficients diagonaux de M soient les inverses de ceux de A est alors évident, car B^{-1} est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux inverses de ceux de B , et le dernier coefficient de M est $\frac{1}{d}$ qui est bien l'inverse du dernier coefficient diagonal de A .

■

Remarque 65

Le résultat est bien sûr tout aussi vrai pour les matrices triangulaires inférieures (il n'y a qu'à prendre la transposée) et pour les matrices diagonales (comme elles sont triangulaires supérieures et inférieures, c'est évident).

2.3 Opérations élémentaires et pivot

Définition 66 (Opérations élémentaires)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice. On définit les trois opérations élémentaires possibles sur les lignes i et j .

1. L'échange de lignes, symbolisé par l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$.
2. La multiplication de L_i par un réel *non nul* λ : $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
3. L'ajout de λ fois la ligne j à la ligne i , symbolisé par l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

On définit les mêmes opérations sur les colonnes de A .

Définition 67 (Matrices élémentaires)

Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

- Soit $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $k \neq \ell$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on appelle *matrice de transvection* la matrice :

$$T_{k,\ell}(\lambda) = I_p + \lambda E_{k,\ell} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & \lambda & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

le λ est à la (k, ℓ) -ième position

Cette matrice est inversible et son inverse est $(T_{k,\ell}(\lambda))^{-1} = T_{k,\ell}(-\lambda)$.

- Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on appelle *matrice de dilatation* la matrice :

$$D_k(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{k,k} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

le λ est à la (k, k) -ième position

Cette matrice est inversible et son inverse est $D_k \left(\frac{1}{\lambda} \right)$.

- Soit $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $k \neq \ell$. On définit la matrice de permutation $P_{k\ell}$ comme $P_{k\ell} = I_n + E_{k\ell} + E_{\ell k} - E_{kk} - E_{\ell\ell}$. On a donc

$$P_{k\ell} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & 1 \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & 1 & & & & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est inversible d'inverse elle-même.

Exercice 68

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Écrire les matrices $T_{1,2}(2)$, $D_3(-2)$ et $P_{1,3}$ et effectuer rapidement les produits

$$T_{1,2}(2)A, D_3(-2)A, P_{1,3}A, AT_{1,2}(2), AD_3(-2) \text{ et } AP_{1,3}$$

Proposition 69

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1.
 - si $\lambda \in \mathbb{K}$, si $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, si $T_{ij}(\lambda)$ est la matrice de transvection de taille $n \times n$ comme définie ci-dessus, alors $T_{ij}(\lambda) \times A$ est la matrice obtenue à partir de A en faisant l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
 - si $\lambda \in \mathbb{K}$, si $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, si $D_k(\lambda)$ est la matrice de dilatation de taille $n \times n$ comme définie ci-dessus, alors $D_k(\lambda) \times A$ est la matrice obtenue à partir de A en faisant l'opération $L_k \leftarrow \lambda L_k$.
 - si $\lambda \in \mathbb{K}$, si $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, si P_{ij} est la matrice de permutation de taille $n \times n$ comme définie ci-dessus, alors $P_{ij} \times A$ est la matrice obtenue à partir de A en faisant l'opération $L_j \leftrightarrow L_i$.
2.
 - si $\lambda \in \mathbb{K}$, si $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, si $T_{ij}(\lambda)$ est la matrice de transvection de taille $n \times n$ comme définie ci-dessus, alors $A \times T_{ij}(\lambda)$ est la matrice obtenue à partir de A en faisant l'opération $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$.
 - si $\lambda \in \mathbb{K}$, si $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, si $D_k(\lambda)$ est la matrice de dilatation de taille $n \times n$ comme définie ci-dessus, alors $A \times D_k(\lambda)$ est la matrice obtenue à partir de A en faisant l'opération $C_k \leftarrow \lambda C_k$.
 - si $\lambda \in \mathbb{K}$, si $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, si P_{ij} est la matrice de permutation de taille $n \times n$ comme définie ci-dessus, alors $A \times P_{ij}$ est la matrice obtenue à partir de A en faisant l'opération $C_j \leftrightarrow C_i$.

De cette proposition on déduit la

Proposition 70

Dans un système linéaire, faire des opérations élémentaires ne change pas l'ensemble de solutions.

Démonstration

Soit $AX = b$ un système linéaire d'inconnue X . Si on fait une série d'opérations élémentaires sur le système linéaire, cela signifie que l'on dispose de $B_1, \dots, B_p$ p matrices élémentaires telles que le système soit transformé en $(B_p \dots B_1)AX = (B_p \dots B_1)b$. Or, ces matrices étant toutes inversibles, on a leur produit $B_p \dots B_1$ qui est inversible, donc $(B_p \dots B_1)AX = (B_p \dots B_1)b \Leftrightarrow AX = b$. ■

Proposition 71

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors A est équivalente en lignes à une matrice échelonnée. Plus précisément, il existe une matrice B dans $GL_n(\mathbb{K})$, produit de matrices élémentaires, telle que BA est échelonnée.

Démonstration

On démontre ce résultat par récurrence. Plus précisément, on montre que pour tout k dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, il existe B_k , produit de matrices élémentaires, tel que $B_k A$ est une matrice dont les k premières colonnes forment une matrice échelonnée.

Initialisation. On considère la première colonne de A . Ou bien elle est nulle et alors $B_1 = I_n$ convient (la première colonne de A constitue une matrice échelonnée). Sinon, alors A possède une ligne i_0 telle que $a_{i_0,1} \neq 0$. On multiplie alors A par P_{1,i_0} . On obtient donc une matrice dont le premier coefficient est non nul. Ensuite, on multiplie la matrice $P_{1,i_0} A$ par $D_1 \left(\frac{1}{a_{i_0,1}} \right)$. Ceci permet de transformer la matrice en une matrice dont le premier coefficient est égal à 1. On note $D_1 \left(\frac{1}{a_{i_0,1}} \right) P_{1,i_0} A = A'$, de coefficients (a'_{ij}) . On effectue alors sur A' , pour tout i dans $\llbracket 2, n \rrbracket$, les opérations $L_i \leftarrow L_i - a'_{i1} L_1$.

Cela permet de transformer la première colonne de A en $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

En posant B_1 comme le produit de toutes les matrices de transvection correspondantes, de $D_1 \left(\frac{1}{a_{i_0,1}} \right)$ et de P_{1,i_0} , on a donc le résultat.

Hérédité. On suppose que l'on dispose, pour un certain k dans $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$, de B_k produit de matrices élémentaires tel que les k premières colonnes de $B_k A$ constituent une matrice échelonnée. Notons ℓ le plus grand indice de ligne non nulle de $B_k A$. Notons $M = B_k A$, $M = (m_{ij})$.

On considère alors la colonne $k+1$: ce

- ou bien tous les coefficients $m_{\ell+1,k+1}, m_{\ell+2,k+1}, \dots, m_{n,k+1}$ sont nuls, et alors la matrice $B_k A$ est déjà échelonnée.
- ou bien ça n'est pas le cas. On prend alors k_0 tel que $k_0 \geq \ell+1$ et $\alpha = m_{k_0,k+1} \neq 0$, et on effectue l'opération $L_{\ell+1} \leftrightarrow L_{k_0}$, i.e. on multiplie $B_k A$ par $P_{\ell+1,k_0}$, afin d'obtenir une matrice M' de coefficients $(m'_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, dont le coefficient $(\ell+1, k+1)$ est égal à $\alpha \neq 0$.

On fait, enfin, pour tout i dans $\llbracket \ell+2, n \rrbracket$, $L_i \leftarrow L_i - \frac{m'_{i,k+1}}{\alpha} L_{\ell+1}$. Cela permet de supprimer tous les coefficients de la colonne $k+1$, et d'avoir une matrice dont les $k+1$ premières colonnes forment une matrice échelonnée.

En posant B_{k+1} le produit de toutes ces matrices de transvection, de $P_{\ell+1,k_0}$ et de B_k , on a le résultat !

Conclusion. D'où l'hérédité et le résultat, en particulier au rang n : on dispose d'une matrice B_n , **invertible**, telle que $B_n A$ est échelonnée. ■

Point de méthode 72

Cela donne à nouveau une méthode pour résoudre un système linéaire : on échelonne sa matrice à l'aide du pivot de Gauss, et on répercute les opérations sur le second membre.

Proposition 73

Soit A une matrice triangulaire supérieure. Alors A est inversible si, et seulement si A est équivalente en lignes à I_n .

Démonstration

$\Rightarrow$ La preuve est assez simple : soient $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ les coefficients de A . Comme A est inversible, ses coefficients diagonaux sont non nuls. Effectuons sur A les opérations élémentaires suivantes : pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$,

- On effectue $L_i \leftarrow \frac{1}{a_{ii}} L_i$: on obtient des coefficients a'_{ij} et des lignes L'_i .
- On effectue pour tout j dans $\llbracket 1, i-1 \rrbracket$ $L'_j \leftarrow L'_j - a'_{ji} L'_i$.

Ainsi, à l'étape $i = 1$, on obtient une colonne avec un 1 en haut à gauche, puis, à l'étape $i = 2$, on obtient une colonne avec un 0 puis un 1, etc.

$\Leftarrow$ Pour le sens réciproque, c'est encore plus simple : si A est équivalente en lignes à I_n , alors on dispose, par la proposition de $B_1, \dots, B_p$ p matrices inversibles telles que $B_p \dots B_1 A = I_n$. Comme $B_1, \dots, B_p$ sont inversibles, $B_p \dots B_1$ est aussi inversible, donc $A = B_1^{-1} \dots B_p^{-1}$ qui est inversible.

■

Exemples de résolutions de systèmes linéaires via le pivot.

2.4 Pivot total pour une matrice carrée

Étant donnés les résultats des deux sections précédentes, on est en droit de se demander si les opérations élémentaires ne nous permettraient pas d'obtenir l'inverse d'une matrice. La réponse est oui ! L'idée est très simple.

Point de méthode 74

Soit A une matrice carrée. Une méthode pour déterminer l'inverse de A est de partir de la matrice A , à laquelle on accole la matrice identité, d'essayer de transformer A en la matrice identité à l'aide d'une méthode de pivot de Gauss, et de répercuter les opérations sur la matrice identité. La matrice obtenue à droite est alors l'inverse de A .

Explications : Si on transforme A en I_n par des opérations élémentaires, c'est que l'on a des matrices élémentaires $B_1, \dots, B_q$ telles que $B_q B_{q-1} B_{q-2} \dots B_1 A = I_n$. Donc $A^{-1} = B_q \dots B_1$. Mais si on a reporté les opérations sur I_n , cela signifie que la matrice obtenue à droite est $B_q \dots B_1 I_n$, donc A^{-1} .

Problème, il faut que l'on justifie que l'on obtient l'inverse de A .

Exemple 75

ATTENTION ! On ne fait que des opérations sur les lignes, OU que des opérations sur les colonnes. On ne mélange surtout pas les deux ! Un mélange horrible...

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xleftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xleftrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 - C_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right),$$

qui n'est pas vraiment l'inverse de la première matrice...

Exemples de calculs d'inverses de matrices carrées.

Proposition 76

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors les ASSE :

1. A est inversible.
2. pour tout b dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = b$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ admet exactement une solution.
3. A est équivalente en lignes à I_n .
4. l'équation $AX = 0_{n,1}$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ admet comme seule solution la solution nulle.
5. pour tout b dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = b$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ admet au moins une solution.

Démonstration

- L'équivalence des deux premières assertions a déjà été vue.
- Ensuite, on montre (1) $\Leftrightarrow$ (3). Si A est inversible, alors A est équivalente en lignes à une matrice triangulaire T . Cette matrice triangulaire est donc aussi inversible car on dispose de B inversible telle que $BA = T$. Donc elle est équivalente en lignes à I_n . Donc A est équivalente en lignes à I_n .
Réciproquement, si A est équivalente en lignes à I_n , alors on dispose de B **inversible** telle que $BA = I_n$. Donc $A = B^{-1}$, inversible.
- Pour la suite on pose $X_0 = {}^T(0 \ \cdots \ 0 \ 1)$.
- On continue en montrant (1) – (2) – (3) $\Leftrightarrow$ (4). Si A est équivalente en ligne à I_n , alors A est inversible, donc si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est tel que $AX = 0_{n,1}$, alors $X = A^{-1}0_{n,1} = 0_{n,1}$. Donc le système admet une seule solution. De même, si A n'est pas équivalente en ligne à I_n , elle est équivalente à une matrice échelonnée dont la dernière ligne est nulle. On en déduit, si B est inversible telle que $BA = T$ avec T échelonnée de dernière ligne nulle, que tous les tX_0 , avec $t \in \mathbb{K}$, sont solution de $TX = 0$. Donc ces vecteurs vérifient $BAX = 0$, donc, comme B est inversible, $AX = 0$.
- Enfin, on finit avec (1) – (2) – (3) $\Leftrightarrow$ (5). Si A est inversible, alors si $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $A^{-1}b$ est solution du système $AX = b$. Si A n'est pas inversible, alors on dispose de B inversible telle que $BA = T$ triangulaire de dernière ligne nulle. Mais alors TX a toujours une dernière ligne nulle. Donc $TX = X_0$ n'a pas de solution. Donc $BAX = X_0$ n'a pas de solution, donc $AX = B^{-1}X_0$ n'a pas de solution.

■

Remarque 77

On a la même propriété pour les matrices équivalentes en colonnes.

Finalement, ceci permet de prouver la

Proposition 78

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible à gauche ssi A est inversible à droite ssi A est inversible.

Démonstration

Si A est inversible à gauche, alors on dispose de B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$. Donc si X vérifie $AX = 0_{n,1}$, alors $BAX = 0_{n,1}$, donc $X = 0_{n,1}$. Donc l'équation $AX = 0_{n,1}$ admet une unique solution, donc A est inversible.

Si A est inversible à droite, alors on dispose de B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$. Donc si $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, si $X = Bb$, alors $AX = ABb = I_nb = b$, donc le système admet au moins une solution. Donc A est inversible. ■

Par ailleurs, on a démontré la jolie et utile propriété algébrique suivante :

Proposition 79

Les matrices élémentaires engendrent $GL_n(\mathbb{K})$.