Chapitre 14 Développements limités

1 Développements limités

1.1 Définition

Définition 1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, a un point ou une borne de I , n un entier. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en a s'il existe $n + 1$ réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n + o((x - a)^{n+1}).$$

$a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n$ est appelée partie régulière du développement limité de f à l'ordre n en a .

Le premier ordre non nul du développement limité de f en a est, s'il existe, $p = \min\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k \neq 0\}$.

Remarque 2

1. L'idée fondamentale des développements limités est la suivante : $(x - a)^{k+1} \underset{x \rightarrow a}{=} o((x - a)^k)$. Ainsi, un développement limité est une manière de présenter des approximations de plus en plus précises d'une fonction f au voisinage d'un point a .
2. Si k est le premier ordre non nul du $dl_n(a)$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_k(x - a)^k$.
3. Les équivalents classiques nous ont permis d'écrire que $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$. Ainsi, $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$: il s'agit d'un développement limité à l'ordre 1 de l'exponentielle.
4. Toute fonction n'admet pas nécessairement de dl :

- $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'admet pas de $dl_0(0)$. Sinon, on aurait $\frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + o(1)$, i.e. $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} a_0$, impossible car $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.
- $x \mapsto \sqrt{x}$ n'a pas de $dl_1(0)$. En effet, si on avait $\sqrt{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + o(x)$, alors, $\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} a_0$, donc $a_0 = 0$. Mais alors

$$\frac{\sqrt{x}}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} a_1 + o(1),$$

absurde car $\frac{\sqrt{x}}{x}$ tend vers $+\infty$ en 0.

- Si f est un polynôme, f admet un dl à tout ordre en 0 : ainsi, si $f(x) = 5x^6 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$, le $dl_4(0)$ de f est

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -1 + x^2 + 2x^3 - x^4 + o(x^4).$$

Proposition 3

- (i) La partie régulière d'un développement limité est unique.
- (ii) Si f admet un dl à l'ordre n en a , alors elle admet un dl à l'ordre m pour tout entier $m \leq n$: si

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x - a) + \dots + a_n(x - a)^n + o((x - a)^n),$$

alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x - a) + \dots + a_n(x - a)^k + o((x - a)^k).$$

On a fait ainsi la **troncature à l'ordre k** de la partie régulière du $dl_n(a)$ de f .

Démonstration

1. On suppose que

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x - a) + \dots + a_n(x - a)^n + o((x - a)^n)$$

et que

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Supposons que $(a_0, \dots, a_n) \neq (b_0, \dots, b_n)$. Alors $\{i \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_i \neq b_i\}$ est une partie de $\mathbb{N}$, non vide, et admet par conséquent un plus petit élément k . Alors $a_0 = b_0, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}$ mais $a_k \neq b_k$.

Mais alors si on pose $g : x \mapsto \sum_{i=0}^{k-1} a_i(x-a)^i$, alors

$$f(x) - g(x) = a_k(x-a)^k + o((x-a)^k)$$

et

$$f(x) - g(x) = b_k(x-a)^k + o((x-a)^k)$$

donc

$$\frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^k} \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} a_k \text{ et } \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^k} \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} b_k,$$

d'où $a_k = b_k$, absurde ! Donc $(a_0, \dots, a_n) = (b_0, \dots, b_n)$.

2. Évident.

■

Remarque 4

C'est faux pour les ordres supérieurs : si

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

alors $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 0 + o(x^2)$, donc f admet un $dl_2(0)$, mais f n'est pas deux fois dérivable en 0 (cf. chapitre sur la dérivabilité)

Proposition 5

1.2 Développements limités usuels en 0

Théorème 6 (Formule de Taylor-Young)

Soient n un entier naturel non nul, f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $a \in I$. Alors

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Proposition 7 (dl usuels en 0)

(i) $e^x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

(ii) $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

(iii) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$

(iv) En particulier, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$

et $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$.

(v) Pour sin,

$$\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2p+1}) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$$

mais, on a aussi

$$\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \boxed{o(x^{2p+1})} \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$$

(vi) Pour cos,

$$\cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2p}) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots + \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$$

mais, on a aussi

$$\cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \boxed{o(x^{2p+1})} \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots + \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

(vii) $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

1.3 Calculs

Maintenant qu'on a nos développements limités usuels, comment les manipuler ?

Proposition 8 (Somme, combinaison linéaire)

Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en a , de parties régulières P_n et Q_n . Alors $\lambda f + g$ admet un développement limité à l'ordre n en a , de partie régulière $\lambda P_n + Q_n$.

Exemple 9

En pratique! Déterminons le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+x) - \sin(x)$.

Pour le reste (produit, quotient, etc...), on va avoir besoin de parler de « troncature » :

Définition 10

La troncature à l'ordre p d'une partie régulière $P_n = \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k$ est simplement $\sum_{k=0}^p a_k(x-a)^k$.

Proposition 11 (Produit)

Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en a , de parties régulières P_n et Q_n . Alors fg admet un développement limité à l'ordre n en a , de partie régulière la troncature à l'ordre n de $P_n Q_n$.

Exemple 12

En pratique! Déterminons le développement limité à l'ordre 3 en 0 de

$$\sin(x)\cos(x) = x - \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

Bon, on n'y est presque pour déterminer nos « formes indéterminées ». Il ne manque plus que les quotients!

Proposition 13 (Composition)

Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en a , de parties régulières P_n et Q_n . Alors $f \circ g$ admet un développement limité à l'ordre n en a , de partie régulière la troncature à l'ordre n de $P_n \circ Q_n$.

Exemple 14

En pratique! Déterminons le dl à l'ordre 4 en 0 de

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

Proposition 15 (Inverse)

Soit f une fonction admettant un dl à l'ordre n en a , **tel que** $f(a) \neq 0$. Alors $\frac{1}{f}$ admet un dl en a à l'ordre n , calculé grâce à la composition de fonctions.

Exemple 16

Déterminons le développement limité de $\frac{1}{\cos(x)}$ en 0, et déduisons-en le développement limité de $\tan(x)$ en 0!

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

QUESTION : que faire si $f(a) = 0$???

Proposition 17 (Inverse)

Soit f une fonction admettant un dl à l'ordre n en a , telle que $f(x) \sim \lambda(x-a)^\alpha$ et g admettant un dl à l'ordre n en a telle que $g(x) \sim \mu(x-a)^\beta$ avec $\beta \leq \alpha$. Alors $\frac{f}{g}$ admet un DL à l'ordre n en a .

Exemple 18

Déterminer de DL de $\frac{\sin(x)}{\ln(1+x)} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + o(x^4)$ à l'ordre 2 en 0.

Une dernière technique est très utile dans la détermination de développements limités.

Proposition 19

Soit f une fonction admettant un dl à l'ordre n en a , F une primitive de f . Alors F admet un développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de a , obtenu en primitivant terme à terme le dl de f : si

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n),$$

alors

$$F(x) = F(a) + a_0x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + o((x-a)^{n+1}).$$

Exemple 20

On retrouve facilement le dl de $\ln$.

Exercice 21

Déterminer le dl à l'ordre 4 de $\text{Arctan}(x)$ en 0.

Remarque 22

En revanche, on n'a pas le droit de dériver les développements limités!

Proposition 23

Si f admet un dl à l'ordre n en a et que f' admet un dl à l'ordre $n - 1$ en a , alors la partie régulière du dl à l'ordre $n - 1$ de f' est la dérivée de la partie régulière du dl à l'ordre n de f .

Remarque 24

Le contre-exemple nécessaire : $x^2 \sin \frac{1}{x}$.

Il peut être utile d'écrire les dl en factorisant par le premier ordre non nul : c'est la *forme normalisée* d'un DL.

Définition 25

La *forme normalisée* de $a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \dots + a_n x^n + o(x^n)$ est

$$x^k (a_k + a_{k+1} x + \dots + a_n x^{n-k} + o(x^{n-k})).$$

Question : que faire quand on n'est pas en 0??

Proposition 26

Si f admet un dl à l'ordre n en a , alors $g : x \mapsto f(x + a)$ admet un dl à l'ordre n en 0.

Point de méthode 27

DL à l'ordre 3 en 2 de $\ln$.
DL à l'ordre 3 en $\frac{1}{e}$ de e^x
DL à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$ de $\sin(x)$.

2 Applications

2.1 Calculs de limites

Une première application est de calculer des limites !

Exemple 28

Déterminer, si elle existe,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\ln(1+x)}.$$

Exemple 29

Déterminer la limite quand x tend vers l'infini de $\left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$.

2.2 Développements asymptotiques

Une extension de la notion de développement limité est la notion de développement asymptotique, pour des grandeurs qui tendent vers l'infini.

Définition 30

On dit que f admet un développement asymptotique en a s'il existe p tel que $(x - a)f(x)$ admette un développement limité en a .

Exemple 31

Déterminer le développement asymptotique de $\frac{1}{e^x - 1}$ quand x tend vers 0.

2.3 Étude locale de courbes

Les développements limités servent à mieux comprendre le comportement local de courbes.

Exemple 32

Étude de la position relative d'une courbe par rapport à sa tangente.

Proposition 33

CNS d'extremum local.

2.4 Application à l'étude de suites définies implicitement

Exemple 34

Pour tout $n \geq 0$, l'équation $e^{-\frac{x}{n}} = x$ admet une unique solution x_n , vérifiant

$$x_n = 1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

2.5 Une étude de l'équivalent de Stirling

Proposition 35

Il existe une constante réelle C telle que $n! \sim C n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$.

Proposition 36

$C = \sqrt{2\pi}$.