N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Chapitre 14
Développements limités – applications

2 Applications

Maintenant que nous avons vu comment calculer des développements limités, il est temps de voir comment les appliquer.

2.1 Notion de développement asymptotique

Exemple 1

Lorsqu'on écrit $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, on peut en déduire que

$$\sin\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

On n'a plus vraiment un développement limité, mais un développement asymptotique.

Définition 2

1. Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, a un point ou une borne de I. On dit que f admet un développement asymptotique à p termes en a s'il existe $g_1, \dots, g_p$ fonctions non nulles telles que
$$f(x) \underset{x\to a}{=} g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_p(x) + o(g_p(x)),$$
et, pour tout i dans $[\![1, p-1]\!]$, $g_{i+1}(x) \underset{x\to a}{=} o(g_i(x))$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet un développement asymptotiques à p termes s'il existe $(v_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (v_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ p suites telles que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n^{(1)} + v_n^{(2)} + \cdots + v_n^{(p)} + o(v_n^{(p)}),$$
et, pour tout i dans $[\![1, p-1]\!]$, $v_n^{(i+1)} \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n^{(i)})$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Point de méthode 3

Il y a essentiellement deux manières de déterminer un développement asymptotique.

- ou bien il s'agit de composer une fonction et un développement limité usuel.
  Exemple : déterminons un développement asymptotique en 0 de x^x.

- ou bien on cherche un équivalent de $f(x)$ (ou de u_n), puis, si cet équivalent est $g(x)$, on cherche un équivalent de $f(x) - g(x)$, et on continue ainsi.
  Exemple : déterminons un développement asymptotique de $\ln(n!)$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Exercice 4

Déterminer le développement asymptotique en 0 de $\dfrac{1}{\sin(x)}$.

2.2 Calculs de limites

À l'aide de développements limités, on peut calculer des limites !

Exercice 5

Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - \ln(1+x)}{x^2}$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$$

Exercices 2 et 3 du TD.

2.3 Étude locale de courbes

Les développements limités servent à mieux comprendre le comportement local de courbes.

Proposition 6

1. si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, si a est un point de I, on rappelle que le dl à l'ordre 1 de f en a, s'il existe, donne l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.
2. si on a mieux :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} b_0 + b_1(x-a) + b_p(x-a)^p + o((x-a)^p),$$

avec $b_p \neq 0$, alors la parité de p et le signe de b_p donnent la position relative de la courbe de f et de sa tangente au point d'abscisse a.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Explications.

Illustrations.

 nlaillet.math@gmail.com

Exercice 4 du TD, 1. et 2.

Proposition 7 (Condition suffisante d'extremum local)

Soit $f \in \mathcal{D}^2(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, $a \in \mathrm{I}$. Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) \neq 0$, alors f atteint un extremum local en a, sa nature étant donnée par le signe de f'' : si $f''(a) > 0$, alors f atteint un minimum local en a. Sinon, f atteint un maximum local en a.

Remarque 8

1. On pourrait généraliser en regardant la première dérivée d'ordre > 1 qui soit non nulle : si elle est paire, on a un extremum local.
2. Au contraire, si $f'(a)$ est quelconque, que $f''(a) = 0$ et que $f'''(a) \neq 0$, on a un **point d'inflexion** de la courbe, c'est-à-dire un changement de position relative locale de la courbe par rapport à sa tangente.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

2.4 Étude en $+\infty$

Exemple 9

Étudions deux exemples : $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x^2+x^{3/2}}$. On a les développements asymptotiques suivants :

$$f(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} x\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} x+\frac{1}{2}-\frac{1}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

De même,

$$g(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \underset{x\to+\infty}{=} x\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} x+\frac{1}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{8}+o\left(1\right).$$

Dessinons ces deux fonctions

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

On en déduit les deux propositions/définitions suivantes :

Proposition 10 (et définition)

1. si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} ax+b+\varepsilon(x)$, avec $\varepsilon(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors f admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = ax+b$. Sa position relative est déterminée par le signe de ε au voisinage de $+\infty$.
2. autre méthode :
   - si $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, la courbe de f admet une branche parabolique d'équation $x = 0$.
   - si $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a \in \mathbb{R}$, alors on étudie $f(x) - ax$:
     - si $f(x) - ax \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, la courbe de f admet une branche parabolique d'équation $y = ax$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

- si $f(x) - ax \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \pm b \in \mathbb{R}$, la courbe de f admet une asymptote d'équation $y = ax + b$. Dans ce cas la position de la courbe et de son asymptote au voisinage de l'infini est déterminée par le signe de $f(x) - ax - b$.

Exercice 4 du TD, 3.

2.5 Application à l'étude de suites définies implicitement

Nous allons, au travers d'un exemple, rappeler, et prolonger, l'étude d'une suite définie implicitement.

1. Démontrer que pour tout $n \geqslant 0$, l'équation $e^{-\frac{x}{n}} = x$ admet une unique solution x_n.

2. Déterminer le sens de variations de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Déterminer la limite ℓ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

4. Déterminer un équivalent de $x_n - \ell$.

5. Déterminer un développement asymptotique de à trois termes de x_n.

Exercice 6 du TD.