

MPSI1 – Programme de colles

Semaine 17 – du 5 au 9 février 2024

Calcul matriciel et systèmes linéaires

Le but de cette section est de présenter une initiation au calcul matriciel. Ainsi, on prépare l'étude géométrique de l'algèbre linéaire menée au second semestre, on revient sur l'étude des systèmes linéaires et on obtient des exemples fondamentaux d'anneaux.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Opérations sur les matrices

Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.

Matrices élémentaires.

Produit matriciel ; bilinéarité, associativité.

Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Transposée d'une matrice.

Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.

Trace, propriétés.

Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.

Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A .

Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.

Notation A^T .

Expression de $\text{Tr}(A^T B)$.

b) Opérations élémentaires

Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes en termes de produit matriciel.

c) Systèmes linéaires

Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire. Système homogène associé.

Système compatible.

Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.

Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A .

On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.

e) Anneau des matrices carrées

Anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Matrice identité, matrice scalaire.

Matrices symétriques, antisymétriques.

Formule du binôme.

Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.

Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.

Inverse d'une transposée.

Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.

Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX = Y$.

Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire ; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.

Non commutativité si $n \geq 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.

Notation I_n .

Notations $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Application au calcul de puissances.

Notation $\text{GL}_n(\mathbb{K})$.

Toute technicité est exclue.

Cas particulier des matrices diagonales.

a) Relations de comparaison - révisions

b) Développements limités

Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point.
Unicité des coefficients, troncature.

Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire.
Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.

Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.

Primitivation d'un développement limité.

Formule de Taylor-Young : pour f de classe $\mathcal{C}^n$, développement limité à l'ordre n en 0 de $h \mapsto f(a+h)$.

Développement limité à tout ordre en 0 de $\exp$, $\sin$, $\cos$, sh , ch , $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arctan .

Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\tan$.

Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction.

Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.

Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0.

Signe de f au voisinage de a .

On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement.

Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.

Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes.

Au programme :

- Cours sur les matrices et ou les dl.
- Commencer les exos par un exo de calcul de dl simple (somme, petit produit).
- Ensuite, exercices de matrices et systèmes linéaires.

Exemples de questions de cours

1. Associativité du produit matriciel, neutre.
2. Distributivité du produit matriciel.
3. Transposée, définition, transposée d'un produit.
4. L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
5. Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}$, produit de matrices de la base canonique.
6. Inversibilité des matrices 2×2 .
7. Décomposition d'une matrice comme somme d'une matrice symétrique et antisymétrique.
8. Expression de $\operatorname{Tr}(A^T B)$ (avec A et B rectangulaires) et, dans $\mathbb{R}$, $\operatorname{Tr}(A^T A) = 0$ ssi $A = 0$.
9. Une matrice A est inversible ssi pour tout b dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\exists ! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $AX = b$.
10. Unicité de la partie régulière d'un dl.
11. Une fonction est continue en a ssi elle admet un dl à l'ordre 0 ; elle est dérivable en a ssi elle admet un dl à l'ordre 1 en a .
12. Preuve du dl de $\exp / \sin / \cos / \operatorname{sh} / \operatorname{ch} / \ln(1+x)$ à l'aide de la formule de Taylor, ou du dl de arctan (à tout ordre), $\operatorname{arcsin} / \operatorname{arccos}$ (à un petit ordre) par intégration.
13. dl de $\tan$ à l'ordre 5 (par la méthode au choix de l'élève : Taylor, quotient de $\sin / \cos$, arctan , équation différentielle)