N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Chapitre 16
Polynômes – formule de Viète

Il semble que les formules de Viète n'aient pas été comprises. Il faut **absolument** faire soi-même le travail de développement de $\lambda(X-\omega_1)(X-\omega_2)$ et $\lambda(X-\omega_1)(X-\omega_2)(X-\omega_3)$. La compréhension de ces formules ne **peut pas** s'apprendre en lisant ou en regardant des vidéos, il faut **écrire soi-même** pour comprendre.

Développons encore...

On écrit (mais il **faut** que vous refassiez cet effort de développer par vous même)

$$\lambda(X-\omega_1)(X-\omega_2) = \lambda X^2 - \lambda(\omega_1+\omega_2)X + \lambda\omega_1\omega_2$$
$$\lambda(X-\omega_1)(X-\omega_2)(X-\omega_3) = \lambda X^3 - \lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_3)X^2 + \lambda(\omega_1\omega_2+\omega_1\omega_3+\omega_2\omega_3)X - \lambda\omega_1\omega_2\omega_3$$

Et, pour vous, le développement pour 4 :

$$\begin{aligned}
&\lambda(X-\omega_1)(X-\omega_2)(X-\omega_3)(X-\omega_4)\\
&= \lambda X^4 - \lambda(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)X^3 + \lambda(\omega_1\omega_2+\omega_1\omega_3+\omega_1\omega_4+\omega_2\omega_3+\omega_2\omega_4+\omega_3\omega_4)X^2\\
&- \lambda(\omega_1\omega_2\omega_3+\omega_1\omega_2\omega_4+\omega_1\omega_3\omega_4+\omega_2\omega_3\omega_4)X + \lambda\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4
\end{aligned}$$

Reconnaissons les coefficients...

Regardez chacune des trois expressions :

- le coefficient de degré $n-1$ est, **dans tous les cas**, $-\lambda \times (\omega_1+\cdots+\omega_n)$, i.e. $-\lambda$ fois la somme des coefficients,
- le coefficient de degré $n-2$ est, **dans tous les cas**, $-\lambda$ fois la somme des produits de deux coefficients : $\omega_1\omega_2+\omega_2\omega_3+\ldots$. Comment écrire cette somme ? On peut l'écrire comme
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \omega_i\omega_j,$$
ou bien, **COMME LES VARIABLES DE SOMMATION SONT MUETTES**,
$$\sum_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant n} \omega_{j_1}\omega_{j_2}.$$
(**REGARDEZ BIEN ! j_1 et j_2 sont des NOMS de variables. C'est tout.**)
- le coefficient de degré $n-3$ (à regarder dans le dernier produit qu'on a développé) est égal à tous les produits de trois coefficients, c'est-à-dire à $\omega_1\omega_2\omega_3+\omega_1\omega_2\omega_4+\ldots$: on peut écrire cette somme
$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} \omega_i\omega_j\omega_k$$
que l'on peut réécrire
$$\sum_{1\leqslant j_1<j_2<j_3\leqslant n} \omega_{j_1}\omega_{j_2}\omega_{j_3}$$
(**REGARDEZ BIEN ! j_1, j_2 et j_3 sont des NOMS de variables. C'est tout.**) On peut encore réécrire cette quantité comme
$$\sum_{1\leqslant j_1<j_2<j_3\leqslant n} \prod_{k=1}^{3} \omega_{j_k}$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Retour sur σ_i

En faisant le chemin inverse, on peut comprendre σ_i :

$$\sigma_i = \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_i \leqslant n} \prod_{k=1}^{i} \omega_{j_k}.$$

(**REGARDEZ BIEN !** $j_1, j_2, \dots, j_i$ **sont des NOMS de variables. C'est tout.**) On peut faire le chemin inverse, en regardant σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 :

- $\sigma_1 = \sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant n} \prod_{k=1}^{1} \omega_{j_k} = \sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant n} \omega_{j_1} \boxed{=} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \omega_k$
- $\sigma_2 = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant n} \prod_{k=1}^{2} \omega_{j_k} = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant n} \omega_{j_1}\omega_{j_2} \boxed{=} \sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant n} \omega_k \omega_\ell = \omega_1\omega_2 + \omega_1\omega_3 + \dots$
- $\sigma_3 = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < j_3 \leqslant n} \prod_{k=1}^{3} \omega_{j_k} = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < j_3 \leqslant n} \omega_{j_1}\omega_{j_2}\omega_{j_3} \boxed{=} \sum_{1 \leqslant k < \ell < m \leqslant n} \omega_k \omega_\ell \omega_m = \omega_1\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_2\omega_4 + \dots$

Tous les « $\boxed{=}$ » sont vrais car les variables de sommation sont muettes.