DM 12
Pour le lundi 26 février

Formules possibles. À la carte, avec **trois conditions seulement** :

- **tout le monde** doit faire au moins la **partie A du problème 1**,
- quand on commence une partie, **on va au bout**,
- enfin, **indiquez en début de copie** les parties que vous avez faites (par exemple « j'ai fait P1-A et P2-A/B/C »). Je noterai en fonction de votre « engagement » de début de devoir.

Vous pouvez déposer votre DM jusqu'au **dimanche 25 février, 18h**, sur cahier-de-prépa, rubrique « Transferts de documents », en **format pdf** (utilisez des applications du genre CamScanner), de taille inférieure à 10 Mo. Vous pouvez aussi les déposer en version papier le lundi matin sur le bureau.

Problème 1. Équivalent de Stirling

A. Formule de Moivre

Nous allons établir dans cette partie qu'il existe $C > 0$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$. Notre but va être de montrer que (u_n) tend vers une limite non nulle.

1. Posons, pour tout entier naturel n, $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$. Calculer v_n pour tout entier naturel n.

2. En rappelant le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+x)$, montrer que

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

3. En revenant à la définition de o, montrer que $0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n^2}$ à partir d'un certain rang.

Convergence de la série des (v_n). On pose pour n dans $\mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$.

4. Montrer que (S_n) est croissante à partir d'un certain rang.

5. En montrant que pour tout entier naturel k non nul, $\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, montrer que (S_n) est bornée. En déduire que (S_n) converge.

6. Déduire des questions précédentes que u_n converge vers une limite non nulle, nommons-là C.

B. Détermination de la constante à l'aide des intégrales de Wallis

On définit, pour tout entier naturel n, l'intégrale $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.

7. Soit n dans $\mathbb{N}$. Déterminer par une intégration par parties que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, et en déduire, pour tout entier p,

$$\begin{cases} W_{2p} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}, \\ W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}. \end{cases}$$

Équivalent de W_n.

8. En utilisant la relation de récurrence trouvée précédemment, montrer que $W_{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.

9. Montrer que pour tout entier naturel n, $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$. En déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}$.

10. Montrer que la suite $\big((n+1)W_nW_{n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, et déterminer sa valeur.

11. En déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

12. Démontrer que la constante C définie dans la première section est égale à $\sqrt{2\pi}$. On a donc démontré que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Problème 2. Polynôme annulateur d'une matrice

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice à coefficients complexes. Si $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on définit l'évaluation de P en M par

$$P(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k M^k, \text{ avec la convention } M^0 = \mathrm{I}_n.$$

Ainsi, si $P(X) = 2X^2 + 3X - 4$, et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $P(A) = 2A^2 + 3A - 4\mathrm{I}_n$.
Un polynôme P est appelé polynôme annulateur de M si $P(M) = 0$ (matrice nulle).
On peut remarquer que si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, si P et Q sont deux polynômes, alors

$$(P+Q)(M) = P(M) + Q(M) \texttt{ et } (PQ)(M) = P(M) \times Q(M).$$

On rappelle donc que si P est un polynôme et M est une matrice, $P(M)$ est **une matrice**.

A. Propriétés générales

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si P est un polynôme annulateur de M, alors pour tout polynÔme Q, $Q \times P$ est un polynôme annulateur de M.

2. Démontrer que si M admet un polynôme annulateur P vérifiant $P(0) \neq 0$, alors M est inversible.

3. Démontrer que si M admet un polynôme annulateur de la forme X^k, où $k \in \mathbb{N}$, alors M n'est pas inversible.

B. Un exemple

On pose ici $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Montrer que $P(X) = X^2 + X - 2$ est un polynôme annulateur de A.

5. En déduire que A est inversible et donner l'expression des coefficients de son inverse.

6. Déterminer, pour n dans $\mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de X^n par P (on ne demande pas le quotient).

7. En déduire une expression de A^n pour tout entier naturel n.

C. Matrice compagnon associée à un polynôme – théorème de Cayley-Hamilton

Si $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ est un polynôme **unitaire** (avec $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ des complexes), on définit la matrice compagnon associée à P par

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

8. Si P est un polynôme unitaire de degré n $\mathbb{C}[X]$, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont les racines de P et $m_1, \ldots, m_r$ leurs multiplicités, exprimer $\mathrm{Tr}(C_P)$ en fonction de $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ et $m_1, \ldots, m_r$.

9. **Dans cette question seulement**, $P(X) = X^3 - X^2 + X - 2$.

(i) Donner l'expression de $A = C_P$.

(ii) Calculer A^2, A^3 et vérifier que $P(A) = 0$.

Le but de la suite de la partie est de généraliser ce résultat, qui est un cas particulier du **théorème de Cayley-Hamilton** : pour tout polynôme P unitaire, $P(C_P) = 0$.

Soit P un polynôme unitaire, $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. On pose $A = C_P$.

On définit pour k dans $[\![1, n]\!]$ le vecteur colonne à n lignes e_k comme $e_k = (\delta_{ik})_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Ainsi,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dans cette partie, on ne demande pas nécessairement un passage par l'écriture formelle des coefficients d'un produit : un calcul matriciel direct, s'il est mené explicitement et clairement, peut être bien plus parlant.

10. Donner la valeur de Ae_1, puis de $A^k e_1$ pour tout k dans $[\![0, n]\!]$.

11. Démontrer que $P(A)e_1 = 0$ (vecteur nul), i.e. que $\left(A^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k\right) e_1 = 0$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

12. En déduire que pour tout j dans $[\![1,n]\!]$, $P(A)e_j = 0$.

13. Conclure que $P(A) \times \mathrm{I}_n = 0$ puis que $P(A) = 0$.

D. Idéal annulateur d'une matrice

Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Ann}(A)$ l'ensemble des polynômes annulateurs de A :

$$\mathrm{Ann}(A) = \{P \in \mathbb{C}[X],\ P(A) = 0\}.$$

On donne ensuite la définition d'un **idéal** de $\mathbb{C}[X]$. Une partie $\mathscr{I}$ de $\mathbb{C}[X]$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$ si :

- $\mathscr{I}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}[X], +)$.
- pour tout P dans $\mathscr{I}$ et Q dans $\mathbb{C}[X]$, $Q \times P \in \mathscr{I}$.

14. Montrer que $\mathrm{Ann}(A)$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$.

Afin de mieux comprendre la stucture des polynômes annulateurs d'une matrice, on va pour terminer ce problème déterminer la structure des idéaux de $\mathbb{C}[X]$. On va montrer le résultat suivant :

Les idéaux de $\mathbb{C}[X]$ sont les $P.\mathbb{C}[X] = \{Q \in \mathbb{C}[X],\ P | Q\}$, où $P \in \mathbb{C}[X]$.

15. Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$, $P.\mathbb{C}[X]$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$.

Soit maintenant $\mathscr{I}$ un idéal de $\mathbb{C}[X]$, que l'on va supposer non réduit à 0 (s'il est réduit à 0, $\mathscr{I} = 0.\mathbb{C}[X]$).

16. Montrer que $\mathscr{I}$ admet un polynôme non nul de degré minimal, P_0, et que $\mathscr{I} = P_0.\mathbb{C}[X]$.

17. Montrer alors que pour toute matrice A, il existe un polynôme π_A tel que $\mathrm{Ann}(A) = \pi_A.\mathbb{C}[X]$.

On appelle ce polynôme le polynôme minimal de A.

18. Si A est une matrice compagnon, montrer que π_A n'est pas le polynôme nul.

19. Si A est une matrice niplotente, montrer qu'il existe k dans $\mathbb{N}$ tel que $\pi_A(X) = X^k$.