

MPSI1 – Programme de colles
Semaine 18 – du 26 février au 1^{er} mars 2023

Analyse asymptotique

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Relations de comparaison - révisions	
b) Développements limités	
Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature.	Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0. Signe de f au voisinage de a .
Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1. Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.	On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement. Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.
Primitivation d'un développement limité. Formule de Taylor-Young : pour f de classe $\mathcal{C}^n$, développement limité à l'ordre n en 0 de $h \mapsto f(a+h)$. Développement limité à tout ordre en 0 de $\exp$, $\sin$, $\cos$, sh , ch , $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arctan .	
Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\tan$. Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction. Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.	Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes.
d) Problèmes d'analyse asymptotique	
Exemples de développements asymptotiques, dans les cadres discret et continu : fonctions réciproques, équations à paramètre, suites récurrentes, suites d'intégrales. Formule de Stirling. Traduction comme développement asymptotique de $\ln(n!)$.	La notion d'échelle de comparaison est hors programme. La démonstration n'est pas exigible.

Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Le programme est assez vague là-dessus. Il faut :

- pouvoir étudier proprement f et $x \mapsto f(x) - x$, en déduire, grâce à des intervalles stables, à quoi appartient u_n , et les limites éventuelles
- pouvoir déterminer la monotonie de (u_n)

Polynômes et fractions rationnelles – COURS SEULEMENT

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Anneau des polynômes à une indéterminée	
Anneau $\mathbb{K}[X]$. Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Degré d'une somme, d'un produit. Composition.	La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n . L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre.
b) Divisibilité et division euclidienne	
Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples. Caractérisation des couples de polynômes associés. Théorème de la division euclidienne.	Algorithme de la division euclidienne.
c) Fonctions polynomiales et racines	
Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité. Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré. Multiplicité d'une racine.	Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section « Nombres complexes ». Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale. Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.

Organisation de la colle

- Question de cours possible sur l'analyse asymptotique et les polynômes.
- Exercices d'asymptotique au sens large : l'utilisation de dl et d'équivalents est au cœur de la colle, mais l'étude d'une suite récurrence/implicite, d'une bijection réciproque d'une fonction, etc. peut être tout à fait pertinente !

Exemples de questions de cours

1. Unicité de la partie régulière d'un dl.
2. dl usuels (par Taylor ou de 4 manières différentes pour $\tan$)
3. Degré d'une somme/d'un produit/d'une composée.
4. Division euclidienne des polynômes.
5. Lien entre racine et factorisation par $X - \alpha$.
6. Définition/caractérisation de la multiplicité.