Chapitre 17
Dénombrement

1 Cardinal d'un ensemble fini

1.1 Définitions

Définition 1

Soit E un ensemble. E est dit fini s'il existe un entier naturel tel que E soit en bijection avec $[\![1, n]\!]$. Cet entier est alors unique et est appelé cardinal de E. On note $n = |E|$, $n = \text{Card}(E)$ ou $n = \#(E)$ (notation à grand-papa).
Par convention, $\text{Card}(\emptyset) = 0$.

Remarque 2

L'unicité d'un tel n vient de la proposition :

(i) Il existe une injection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, q]\!]$ si et seulement si $p \leqslant q$.

(ii) Il existe une surjection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, q]\!]$ si et seulement si $p \geqslant q$.

(iii) Il existe une bijection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, q]\!]$ si et seulement si $p = q$.

La preuve de cette proposition n'a pas vraiment d'intérêt : faites des flèches entre des patates pour vous convaincre que c'est la bonne chose !

Exemple 3

1. Toute partie bornée de $\mathbb{N}$ est finie.
2. $\text{Card}(\mathbb{U}_n) = n$ (démontré au chapitre 3)

Proposition 4

Toute partie d'un ensemble fini est finie.

On en déduit une proposition fondamentale.

Proposition 5

Soient E et F deux ensembles de cardinaux respectifs p et q.

(i) Il existe une injection de E dans F si et seulement si $p \leqslant q$.

(ii) Il existe une surjection de E dans F si et seulement si $p \geqslant q$.

(iii) Il existe une bijection de E dans F si et seulement si $p = q$.

Une proposition très similaire est le « principe des tiroirs de Dirichlet »

Proposition 6

Si l'on doit ranger $n+1$ chaussettes dans n tiroirs, il y a au moins un tiroir contenant deux chaussettes.

Plus précisément, on peut énoncer la proposition ainsi :

Proposition 7

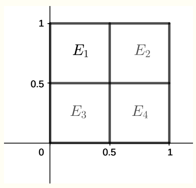
Soit E un ensemble, $(A_1, \dots, A_n)$ un recouvrement de E. Si $(x_1, \dots, x_{n+1})$ sont $n+1$ éléments de E, alors il existe $k \in [\![1, n]\!]$, $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$ tels que $i \neq j$ et tels que $(x_i, x_j) \in A_k^2$.

Remarque 8

Rappel : $(A_1, \dots, A_n)$ est un recouvrement de E si $E = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Exemple 9

Si l'on prend 5 points A, B, C, D, E dans $[0, 1]^2$, deux au moins sont à une distance inférieure ou égale à $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



Pour ce faire on remarque que $[0, 1]^2 = E_2 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$, donc parmi les 5 points, deux sont au moins dans un même E_i, donc à distance au plus la diagonale d'un E_i, i.e. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 10

Soient $(x_0, \dots, x_{50})$ une suite strictement croissante de 51 entiers tous compris entre 1 et 100 (inclus). Démontrer que

$$\prod_{i=0}^{49} (x_{i+1} - x_i - 1) = 0.$$

Remarque 11

Quel est le lien entre le principe des tiroirs et les applications : un lien auquel on peut penser est que si

$$f : E \to F,$$

et si, pour tout y, $f^{-1}(\{y\})$ est l'**image réciproque** de y par f (i.e. l'ensemble des x dans E tels que $f(x) = y$), alors

$$E = \bigcup_{y \in F} f^{-1}(\{y\}).$$

Ainsi, si F a moins d'éléments que E, il y a au moins deux éléments de E qui appartiennent à un même $f^{-1}(\{y\})$, i.e. deux éléments de E qui ont la même valeur par f, donc f n'est pas injective.

Proposition 12

Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est une injection si et seulement si c'est une surjection si et seulement si c'est une bijection.

Remarque 13

Cette proposition permet de bien raccourcir certains raisonnements ! Par exemple, si on considère

$$\varphi : \left| \begin{array}{rcl} [\![0, n-1]\!] & \to & \mathbb{U}_n \\ k & \mapsto & e^{\frac{2ik\pi}{n}} \end{array} \right. ,$$

on sait que φ est un morphisme, qu'il est injectif (on regarde son noyau), **donc** il est bijectif.

Proposition 14

Soient E un ensemble fini et F un ensemble, φ une injection de E dans F. Alors $\varphi(E)$ est un ensemble fini de même cardinal que E.

1.2 Opérations entre ensembles

Notation 15 (Réunion disjointe)

Désormais, dès que l'on note $A \sqcup B$, cela signifie que la réunion est **disjointe**, i.e. que $A \cap B = \emptyset$.

On notera aussi $\displaystyle\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$ pour une réunion disjointe d'un nombre quelconque d'ensembles.

Proposition 16

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E.

1. Si $A \cap B = \emptyset$, alors $\text{Card}(A \sqcup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.
2. Si $A \subset B$, $\text{Card}(B \setminus A) = \text{Card}(B) - \text{Card}(A)$.
3. De manière générale,

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

Démonstration

1. (preuve facultative) Pour cette preuve, on va construire proprement une bijection. Soit $n = \text{Card}(A)$ et $p = \text{Card}(B)$, soit φ une bijection de A dans $[\![1, n]\!]$ et ψ une bijection de B dans $[\![1, p]\!]$ Posons
$$\theta : \left| \begin{array}{l} A \sqcup B \to [\![1, p+n]\!] \\ x \mapsto \begin{cases} \varphi(x) \text{ si } x \in E \\ n + \psi(x) \text{ si } x \in F. \end{cases} \end{array} \right.$$
θ est bien définie car $A \cap B = \emptyset$ (donc aucun élément n'a deux images).
   - θ est injective : soient x et x' dans $A \sqcup B$ tels que $\theta(x) = \theta(x')$.
     — si $(x, x') \in A^2$, alors $\varphi(x) = \varphi(x')$ donc $x = x'$ car φ est une bijection,
     — si $(x, x') \in B^2$, alors $\psi(x) = \psi(x')$ donc $x = x'$ car ψ est une bijection,
     — sinon, $x \in A$ et $x' \in B$, donc $\theta(x) \leqslant n$ et $\theta(x') > n$, impossible !
     On conclut donc que $x = x'$, donc θ est injective.
   - θ est surjective : soit $k \in [\![1, n+p]\!]$.
     — si $k \leqslant n$, on pose $x = \varphi^{-1}(k)$. $x \in A \subset A \sqcup B$ et $\theta(x) = \varphi(x) = k$,
     — si $k \geqslant n+1$, $k - n \in [\![1, p]\!]$. On pose $x = \psi^{-1}(k-n)$. C'est un élément de $B \subset A \sqcup B$ et $\theta(x) = n + k - n = k$.
     D'où la surjectivité de θ et, ainsi, sa bijectivité.
2. Remarquons que, si $A \subset B$,
$$B = A \sqcup (B \setminus A).$$
Le résultat s'en déduit immédiatement.
3. Écrivons que
$$A \cup B = A \cup (B \setminus A \cap B).$$
Alors
$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B \setminus A \cap B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

■

Exercice 17

Combien y a-t-il de nombres à 3 chiffres divisibles ni par 2, ni par 3 ?

Par une récurrence immédiate, on en déduit

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Proposition 18

Soient E un ensemble, $A_1, \dots, A_n$ des sous-ensembles finis de E. Alors

1. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est finie et $\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \text{Card}(A_i)$, avec égalité si, et seulement si les A_i sont deux à deux disjoints.
2. (Hors-Programme culturel) Formule du crible :

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n} \text{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Exercice 19

Essayer d'appliquer la formule du crible pour $n = 3$ et retrouver

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$
$$= \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \text{Card}(A_3) - \text{Card}(A_1 \cap A_2) - \text{Card}(A_1 \cap A_3) - \text{Card}(A_2 \cap A_3) + \text{Card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Lemme 20 (Lemme des bergers)

Toute réunion disjointe de n ensembles à p éléments contient np éléments.

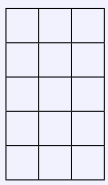
Proposition 21 (Produit cartésien)

Soient $(E_1, \dots, E_n)$ des ensembles finis. Alors $E_1 \times \dots \times E_n$ est un ensemble fini et

$$\text{Card}(E_1 \times \dots \times E_n) = \text{Card}(E_1) \times \dots \times \text{Card}(E_n).$$

Remarque 22

Ceci doit vous paraître logique : si vous cherchez $\text{Card}([\![1, 3]\!] \times [\![1, 5]\!])$, vous cherchez combien il y a de cases dans ce quadrillage : c'est bien $3 \times 5 = 15$.

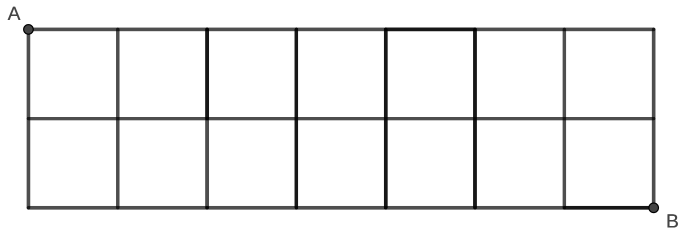


N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

2 Méthodes combinatoires

2.1 Un problème introductif

Nous allons présenter un problème, en voir plusieurs solutions et voir comment rédiger un raisonnement de dénombrement.
On se déplace sur la grille suivante (on se déplace sur les traits et non sur les cases). On suppose qu'il y a p cases en longueur mais 2 cases en hauteur.
On ne peut qu'aller à droite ou descendre. Combien y a-t-il de chemins qui relient A à B ?



Essayez de trouver une réponse avant de passer à la page suivante.

Voici plusieurs possibilités de réponse :

1. Choisir un chemin, c'est :
- choisir le premier point où on descend ($k \in [\![0, p]\!]$),
- **puis** choisir le second point où l'on descend : il y en a $p + 1 - k$.

D'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} p + 1 - k = \frac{(p+1)(p+2}{2}$ choix possibles.

2. un chemin qui va de A à B vérifie l'une des propriétés suivantes :
- ou bien il descend d'un coup de deux cases : choisir un tel chemin, c'est choisir le point en lequel on descend, d'où $p + 1$ possibilités.
- ou bien il descend en deux endroits distincts. Choisir un tel chemin, c'est choisir deux points distincts entre 0 et p, i.e. $\dbinom{p+1}{2}$, i.e. $\dfrac{p(p+1)}{2}$.

D'où, au total, $p + 1 + \dfrac{p(p+1)}{2} = \dfrac{(p+1)(p+2)}{2}$.

3. un chemin de A à B est un chemin de longueur $p + 2$. Choisir un chemin de longueur $p + 2$ de A à B, c'est choisir une suit d'instructions parmi « Bas » ou « Droite », en ne demandant que 2 fois d'aller en bas. C'est donc choisir une suite de lettre « DDDDDBDDDDBDDD » de longueur $p+2$, qui contient uniquement 2 « B » : il y a $\dbinom{p+2}{2} = \dfrac{(p+2)(p+1)}{2}$ possibilités.

Bilan. Les mots-clefs de dénombrement permettent ensuite de bien mener ses calculs :
- « choisir... c'est choisir... » : cela signifie que l'on établit une bijection,
- « puis » : si le nombre après le « puis » est indépendant du choix précédent, on multiplie les quantités. Sinon on a une somme indexée sur le premier choix.
- « ou bien » : on fait une réunion disjointe

Parfois, vous aurez aussi à éliminer les doublons : c'est que vous raisonniez sur des réunions non disjointes ou bien que vous appliquiez le lemme des bergers.

2.2 Listes

Définition 23 (et prop)

Soit E un ensemble à n éléments. Une p-liste ou un p-uplet est une famille de p éléments de E, i.e. un élément de E^p.
Il y a n^p p-listes sur E.
Les p-listes servent à modéliser les tirages successifs, avec remise.

Exemple 24

Combien y a-t-il de mots de 8 lettres formés avec les lettres du mot MPSI ? Un mot est une suite de lettres : on ne tient pas compte du sens.
Il y en a 4^8.

2.3 Arrangements

Définition 25 (et prop)

Soit E un ensemble à n éléments. Un p-arrangement de E est une famille de p éléments de E deux à deux distincts.
Il y a $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ arrangements à p éléments de E.
Les arrangements servent à modéliser les tirages successifs, sans remise.

Démonstration

Choisir un arrangement, c'est choisir la valeur du premier nombre (n choix), puis celle du second ($n-1$ choix), etc, jusqu'au p-ième nombre ($n-p+1$) choix. ■

Exercice 26

Combien de codes à quatre chiffres distincts peut-on faire ? À quatre chiffres non nécessairement distincts ?

Proposition 27

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n.

(i) Il y a n^p applications de E dans F

(ii) Si $n \geqslant p$, il y a A_n^p injections de E dans F. Sinon il n'y en a aucune.

(iii) Si $n = p$, il y a $n!$ bijections de E dans F.

Démonstration

1. Choisir une application de $E = \{e_1, \dots, e_p\}$ dans F, c'est
   - choisir l'image de e_1 (n possibilités),
   - **puis** choisir l'image de e_2 (n possibilités),
   - ...
   - puis choisir l'image de e_p (n possibilités.

   D'où $n \times \cdots \times n = n^p$ possibilités.
2. Choisir une injection de $E = \{e_1, \dots, e_p\}$ dans F, c'est
   - choisir l'image de e_1 (n possibilités),
   - **puis** choisir l'image de e_2 ($n-1$ possibilités),
   - ...
   - puis choisir l'image de e_p ($n-p+1$ possibilités.

   D'où $n \times (n-1) \cdots \times (n-p+1) = A_n^p$ possibilités.
3. Entre deux ensembles de même cardinal, l'injectivité équivaut à la bijectivité : ceci assure le résultat.

■

Proposition 28

Soit E de cardinal n. Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini, de cardinal 2^n.

Démonstration

Preuve avec les mains. Choisir une partie A de $E = \{e_1, \dots, e_n\}$, c'est
- choisir si $e_1 \in A$ (2 possibilités),
- puis choisir si $e_2 \in A$ (2 possibilités),
- ...
- puis choisir si $e_n \in A$ (2 possibilités),

d'où $2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ possibilités.
Preuve rigoureuse. On sait depuis le chapitre 5 que l'application

$$\chi : \left| \begin{array}{c} \mathcal{P}(E) \to \{0,1\}^E \\ A \mapsto \mathbb{1}_A \end{array} \right.$$

est bijective. Donc $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = \mathrm{Card}(\{0,1\}^E) = 2^{\mathrm{Card}(E)}$. ■

2.4 Parties d'un ensemble – combinaisons

Définition 29 (et prop)

Une combinaison à p éléments d'un ensemble fini E à n éléments est une partie de E à p éléments.
Il y en a $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Remarque 30

Si E est de cardinal n, si l'on note $\mathcal{A}_{p,n}$ l'ensemble des p arrangements de E et $\mathcal{C}_{p,n}$ l'ensemble des p-combinaisons de E, on considère

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{p,n} & \to & \mathcal{C}_{p,n} \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto & \{x_1, \dots, x_p\} \end{array} \right.$$

Il faut bien différentier un p-uplet, qui est ordonnée, et un ensemble, qui ne l'est pas : $(1,2,3) \neq (1,3,2)$ *mais* $\{1,2,3\} = \{1,3,2\}$.
Pour toute p-combinaison $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ d'éléments de E, il existe $p!$ arrangements dont l'image par f vaut B : il s'agit de toutes les permutations des éléments $x_1, \dots, x_n$!
Ainsi, le lemme des bergers nous dit que

$$A_n^p = p!\binom{n}{p}$$

Exercice 31

Combien y a-t-il d'anagrammes du mot « FEUILLE » ?

Exercice 32

Un glacier vend 10 parfums de glace différents. Il propose des cônes 3 boules, superposées les unes sur les autres : le cornet $\boxed{\begin{array}{l}\text{pistache}\\\text{framboise}\\\text{vanille}\end{array}}$ est donc différent du cornet $\boxed{\begin{array}{l}\text{pistache}\\\text{vanille}\\\text{framboise}\end{array}}$. Il propose aussi des coupes 3 boules, où les 3 boules sont placées en cercle : l'ordre n'a donc pas d'importance.
En supposant que les 3 boules choisies sont différentes, combien y a-t-il de cornets/de coupes possibles ?
Et si l'on enlève l'hypothèse des 3 boules différentes ?

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Proposition 33

Démonstrations combinatoires de

1. la symétrie des coefficients binomiaux $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. la formule $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
3. la formule de Pascal : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
4. (lemme des chefs) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$
5. la formule de Vandermonde $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$.

Démonstration

Soit E un ensemble à n éléments. On note $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des parties de E à k éléments.

1. On remarque que pour tout X dans E à k éléments, $\overline{X}$ est une partie de E à $n-k$ éléments. Ainsi, l'application

$$f : \left| \begin{array}{c} \mathcal{P}_k(E) \to \mathcal{P}_{n-k} \\ X \mapsto \overline{X} \end{array} \right.$$

est bijective, donc $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

2. On remarque que $\mathcal{P}(E) = \bigsqcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k(E)$, donc

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(\mathcal{P}_k(E)),$$

donc

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

3. **Raisonnement élémentaire :** soit x un élément de E. Choisir une partie à k éléments de E, c'est
   - **ou bien** décider que cette partie contient x : il reste donc une partie à $k-1$ éléments de $E \setminus \{x\}$ à choisir, c'est-à-dire $\binom{n-1}{k-1}$,
   - **ou bien** décider que cette partie ne contient pas x : il reste donc une partie à k éléments de $E \setminus \{x\}$ à choisir, c'est-à-dire $\binom{n-1}{k}$.

   D'où $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

4. **Raisonnement rigoureux :** considérons les deux parties de $\mathcal{P}_k(E)$ suivantes

$$\mathcal{A} = \{F \in \mathcal{P}_k(E),\ x \in F\} \text{ et } \mathcal{B} = \{F \in \mathcal{P}_k(E),\ x \notin F\}.$$

alors $\mathcal{P}_k(E) = \mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$. Or,

- l'application
$$\varphi : \left| \begin{array}{r} \mathcal{P}_{k-1}(E \setminus \{x\}) \to \mathcal{A} \\ F \mapsto F \sqcup \{x\} \end{array} \right.$$
est bijective, donc $\mathrm{Card}(\mathcal{A}) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}_{k-1}(E \setminus \{x\})) = \binom{n-1}{k-1}$,
- l'application
$$\psi : \left| \begin{array}{r} \mathcal{P}_{k}(E \setminus \{x\}) \to \mathcal{B} \\ F \mapsto F \end{array} \right.$$
est bijective, donc $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}_{k}(E \setminus \{x\})) = \binom{n-1}{k}$.

On en déduit que
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

5. - **Preuve « Père Castor, raconte-nous une histoire »** On choisit, dans une population de n personnes, un conseil de k personnes, qui élisent parmi elles un·e chef·fe.
     - soit on choisit d'abord la personne à la tête de la population (n possibilités), puis le conseil (il y a $\binom{n-1}{k-1}$ possibilités parmi les personnes restantes). D'où $n\binom{n-1}{k-1}$ possibilités.
     - soit on choisit d'abord le conseil, $\binom{n}{k}$ possibilités, puis le conseil choisit une personne (k possibilités), d'où $k\binom{n}{k}$ possibilités.
   - **Preuve rigoureuse :** On considère la partie
   $$\mathcal{C} = \{(x, F),\ F \in \mathcal{P}_k(E),\ x \in F\}.$$
     - On peut écrire que
     $$\mathcal{C} = \bigsqcup_{x \in E} \{(x, F),\ x \in F,\ F \in \mathcal{P}_k(E)\}$$
     Notons, à x fixé, $\mathcal{E}_x = \{(x, F),\ x \in F,\ F \in \mathcal{P}_k(E)\}$. Alors l'application
     $$\varphi : \left| \begin{array}{r} \mathcal{P}_{k-1}(E \setminus \{x\}) \to \mathcal{E}_x \\ G \mapsto G \sqcup \{x\} \end{array} \right.$$
     est une bijection. Ainsi, $\mathrm{Card}(\mathcal{E}_x) = \binom{n-1}{k-1}$. D'où
     $$\mathrm{Card}(\mathcal{C}) = \sum_{x \in E} \binom{n-1}{k-1} = \mathrm{Card}(E).\binom{n-1}{k-1} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

— On peut aussi écrire que

$$\mathcal{C} = \bigsqcup_{F \in \mathcal{P}_k(E)} \{(x, F),\ x \in F\}.$$

Notons, à F fixé, $\mathcal{D}_F = \{(x, F),\ x \in F\}$. Alors l'application

$$\psi : \left| \begin{array}{l} F \to \mathcal{D}_F \\ x \mapsto (x, F) \end{array} \right.$$

est bijective, donc $\mathrm{Card}(\mathcal{D}_F) = \mathrm{Card}(F) = k$, d'où

$$\mathrm{Card}(\mathcal{C}) = \sum_{F \in \mathcal{P}_k(E)} k = \mathrm{Card}(\mathcal{P}_k(E)).k = \binom{n}{k} k$$

D'où, par unicité du cardinal, $n\binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} k$.

6. **Preuve élémentaire :** Soit E un ensemble, A une partie de E à a éléments, B une partie de E à b éléments, telles que $A \cap B = \emptyset$. Choisir une partie de $A \sqcup B$ à n éléments, c'est
   - fixer le nombre k d'éléments de A qu'elle va contenir ($a + 1$ possibilités, k varie de 0 à n),
   - puis, pour chaque k fixé, c'est choisir k éléments de A, i.e. $\binom{a}{k}$ possibilités, puis $n - k$ éléments de B, i.e. $\binom{b}{n-k}$ possibilités.

   D'où $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$ parties de $A \sqcup B$ à n éléments, d'où

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}.$$

■

Exercice 34

Rédiger une preuve rigoureuse de la formule de Vandermonde.

Résumons. On a trois objets importants

1. les listes : n^p = ordonné, avec répétition
2. les arrangements : $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ = ordonné, sans répétition
3. les combinaisons : $\binom{n}{p}$ = non ordonné, sans répétition

2.5 Exercice-bilan : tirages non ordonnés avec répétition

Sept personnes sont dans un bar à cocktails. Le bar propose 10 variétés de cocktails. Combien y a-t-il de choix possibles ?
La question est vague, et va dépendre du point de vue : celui du serveur ou celui de la barmaid.
Du point de vue du serveur, chacune des 7 personnes a 10 choix possibles, d'où 10^7 possibilités : il s'agit d'une 7-liste à valeur dans un ensemble à 10 éléments.
Du point de vue de la barmaid, c'est plus délicat : elle ne voit pas les personnes. Elle se demande juste : « combien y a-t-il de manières de sélectionner 7 cocktails, avec éventuellement des doublons, parmi les 10 que je mets à ma carte ? »
De manière plus générale, étant donné un ensemble à n éléments, de combien de manière puis-je sélectionner p éléments de cet ensemble ?

Premier point de vue (Preuve « Père Castor, raconte-nous une histoire ») les cases et les petits bâtons.

On peut imaginer que la barmaid a un tableau avec les cocktails :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Choisir 7 cocktails, c'est juste choisir de mettre des petits bâtons dans les cases. Par exemple :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
||		|			|||		|		

Mais, la barmaid est tellement habituée à ses tableaux et ses bâtons qu'elle décide de noter les choses autrement, pour gagner de la place sur ses feuilles de commandes : au lieu de noter les cases, elle note un − dès qu'on passe à une autre case. Ainsi, la commande ci-dessus devient :

$$|| - - | - - - ||| - - | - -$$

Quand on y pense, quelle que soit la commande, elle comprendra 7 bâtons et 9 tirets. Choisir une commande, c'est choisir la place des bâtons ou des tirets parmi les 16 caractères que comprend une commande : d'où $\binom{16}{7}$ possibilités.

De manière générale, il y a $\binom{n+p-1}{p}$ possibilité de choisir p éléments, sans ordre, avec remise, dans un ensemble à n éléments.

Exercice 35 (Deuxième approche : les applications croissantes)

On cherche à établir d'une autre manière le résultat précédent. Soit E un ensemble à n éléments. On se demande de combien de manières on peut sélectionner, sans tenir compte de l'ordre, et avec répétition, p éléments de E.

1. Démontrer que le nombre recherché correspond au nombre d'applications croissantes (pas strictement) de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.
2. Démontrer que l'ensemble des applications croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est en bijection avec l'ensemble des applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n+p-1]\!]$. *On construira explicitement la bijection.*
3. Démontrer qu'il y a $\binom{a}{b}$ applications **strictement** croissantes de $[\![1,b]\!]$ dans $[\![1,a]\!]$.
4. En déduire le résultat voulu.

3 Corrections des exercices

Correction (exercice 10)

On considère les 51 nombres $(x_0, \dots, x_{50})$. Ces 51 nombres sont tous dans $[\![1, 100]\!] = \bigcup_{k=1}^{50} [\![2k-1, 2k]\!]$. Comme on met 51 nombres dans 50 ensembles, deux nécessairement sont dans le même ensemble. Donc il existe $i \neq j$, disons $i < j$, tels que $x_j - x_i \leqslant 1$. Comme la suite est strictement croissante, $1 \leqslant x_{i+1} - x_i \leqslant x_j - x_i \leqslant 1$, donc $x_{i+1} = x_i + 1$, donc $x_{i+1} - x_i - 1 = 0$. Ainsi,

$$\prod_{k=0}^{49} (x_{k+1} - x_k - 1) = 0.$$

Correction (exercice 17)

Notons $A_n = \{k \in [\![100, 999]\!],\ n|k\}$. Alors A_2 possède $\left\lfloor \frac{999-100+1}{2} \right\rfloor = 450$ éléments, A_3 possède $\frac{999-102}{3} + 1 = 300$ éléments, et A_6 en possède 150. De plus, par le théorème de Gauss, $A_2 \cap A_3 = A_6$. Ainsi, si l'on note B l'ensemble des nombres divisibles ni par 2, ni par 3,

$$\begin{aligned}
\text{Card}(B) &= \text{Card}([\![100, 999]\!]) - \text{Card}(A_2 \cup A_3) \\
&= 900 - \text{Card}(A_2) - \text{Card}(A_3) + \text{Card}(A_6) \\
&= 900 - 450 - 300 + 150 = 300.
\end{aligned}$$

Il y a donc 300 nombres qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 3.

Correction (exercice 19)

Pour $n = 3$, on a

$$\begin{aligned}
\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \text{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\
&= (-1)^{1+1} \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant 3} \text{Card}(A_{i_1}) + (-1)^{2+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 3} \text{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) \\
&+ (-1)^{3+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n} \text{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3})
\end{aligned}$$

Là, i_1, i_2, i_3 sont juste des **noms** de variables ! On aurait pu mettre, i, j et k ! Ainsi,

$$\sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant 3} \text{Card}(A_{i_1}) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \text{Card}(A_3),$$

puis

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant 3} \operatorname{Card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}) = \sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=i_1+1}^{3} \operatorname{Card}(A_{i_1}\cap A_{i_2})$$
$$= \operatorname{Card}(A_1\cap A_2) + \operatorname{Card}(A_1\cap A_3) + \operatorname{Card}(A_2\cap A_3),$$

et, enfin,

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant n} \operatorname{Card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}) = \sum_{i_1=1}^{1}\sum_{i_2=i_1+1}^{2}\sum_{i_3=i_2+1}^{i_3} \operatorname{Card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}) = \operatorname{Card}(A_1\cap A_2\cap A_3).$$

Ici, il n'y a qu'un triplet possible !
Ceci nous permet d'avoir la formule désirée !

Correction (exercice 26)

Déjà, avec répétition éventuelle, il y a 10000 codes possibles à 4 chiffres. (10 possibilités par chiffre)
Sans répétition, il y a $10\times 9\times 8\times 7 = A_10^4$ codes possibles.

Correction (exercice 31)

Choisir une anagramme de FEUILLE, c'est

- choisir la position du « F » : 7 choix possibles,
- puis choisir la position des deux « E » : $\binom{6}{2}$ choix possibles (dans les 6 emplacements restants, on en choisit 2, peu importe l'ordre !)
- puis choisir la position du « U » : 4 choix possibles
- puis choisir la position du « I » : 3 choix possibles
- les deux positions restantes sont celles des deux « L »

D'où $7\times\dfrac{6\times 5}{2}\times 4\times 3 = 7\times 6\times 5\times 2\times 3 = 1260$ anagrammes possibles.

Correction (exercice 32)

1. pour les cornets avec 3 boules distinctes, choisir un tel cornet, c'est choisir un 3-arrangement dans un ensemble à 10 éléments, d'où $10\times 9\times 8$ cornets possibles,
2. pour les cornets avec 3 boules quelconques, choisir un tel cornet, c'est choisir une 3-liste, d'où 1000 possibilités,
3. pour les coupes avec 3 boules distinctes, choisir une telle coupe, c'est choisir une combinaison à 3 éléments dans un ensemble à 10 éléments. D'où $\binom{10}{3} = \dfrac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1} = 120$ possibilités,

4. pour les coupes avec 3 boules quelconques, choisir une telle coupe, c'est
   - **ou bien** la choisir avec 3 boules distinctes, d'où 120 possibilités,
   - **ou bien** la choisir avec 3 boules identiques, d'où 10 possibilités,
   - **ou bien** la choisir avec 2 boules identiques (10 possibilités) puis une troisième différente (9 possibilités) d'où 90 possibilités

   D'où, au total, 220 possibilités.

Correction (exercice 34)

On fixe A et B deux parties de E de cardinaux respectifs a et b. On fixe n un entier. On note $\mathcal{P}_n(A \sqcup B)$ l'ensemble des parties de $A \sqcup B$ de cardinal n. On note, pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathcal{A}_k = \{F \in \mathcal{P}_n(A \sqcup B),\ \mathrm{Card}(F \cap A) = k\}$. Alors comme $\mathcal{P}_n(A \sqcup B) = \bigsqcup_{k=0}^{n} \mathcal{A}_k$,

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}_n(A \sqcup B)) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(\mathcal{A}_k).$$

Or, l'application

$$\varphi : \left|\begin{array}{rcl} \mathcal{P}_k(A) \times \mathcal{P}_{n-k}(B) & \to & \mathcal{A}_k \\ (G, H) & \mapsto & G \sqcup H \end{array}\right. .$$

est une bijection, donc $\mathrm{Card}(\mathcal{A}_k) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}_k(A) \times \mathcal{P}_{n-k}(B)) = \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.

Correction (exercice 35)

1. Choisir une application croissante de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$, c'est choisir p valeurs de $[\![1, n]\!]$, éventuellement répétées : un fois que ces valeurs ont été choisies, il n'y a qu'une application croissante correspondante. Il suffit en effet de les ordonner ($a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_p$), et de poser $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(p) = a_p$.
2. On appelle A l'ensemble des applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ et B l'ensemble des applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n+p-1]\!]$. Alors l'application

$$\varphi : \left|\begin{array}{l} A \to B \\ f \mapsto g : \left|\begin{array}{rcl} [\![1, p]\!] & \to & [\![1, n+p-1]\!] \\ x & \mapsto & f(x) + x - 1 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

   est une application qui va bien de A dans B : si f est croissante, $\varphi(f)$ est strictement croissante : si $x < y$,

$$\varphi(f)(x) = f(x) + x - 1 < f(y) + y - 1 = \varphi(y).$$

   De plus, $\varphi(f)$ est bien à valeurs dans $[\![1, n+p-1]\!]$.
   L'application φ est, de plus, bijective. Si $g \in B$, on pose

$$f : x \mapsto g(x) - (x - 1).$$

Déjà, comme $g(1) \geqslant 1$, $f(1) \geqslant 1$. Ensuite, comme g est strictement croissante, on sait que si $x \in [\![1, p]\!]$,

$$f(x+1) - f(x) = g(x+1) - g(x) - 1 \geqslant 1 - 1 = 0,$$

donc f est croissante. Elle est bien à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ car $g(p) \leqslant n + p - 1$, donc $f(p) \leqslant n + p - 1 - (p-1) = n$.
Ainsi, A et B sont en bijection, donc ont même cardinal !

3. Choisir une application strictement croissante de $[\![1, b]\!]$ dans $[\![1, a]\!]$, c'est simplement choisir l'ensemble de ses valeurs : elles sont toutes distinctes et, si C est une partie de $[\![1, a]\!]$ à b éléments, il y a une unique application strictement croissante dont l'ensemble des valeurs est C.
Ainsi, il y a autant d'applications strictement croissante de $[\![1, b]\!]$ dans $[\![1, a]\!]$ que de parties de $[\![1, a]\!]$ à b éléments, i.e. $\binom{a}{b}$.

4. D'où $\binom{n+p-1}{p}$ applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.