N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Chapitre 18
Espaces vectoriels

1 Espaces vectoriels

1.1 Structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel

On a rencontré, avec les matrices et les polynômes, des objets que l'on pouvait additionner et soustraire (structure de groupe additif), mais que l'on pouvait aussi multiplier par un réel ou un complexe ! Cette idée de multiplication par un réel s'est aussi vue lorsqu'on a fait les équations différentielles, les intégrales, les dérivées, etc... Il est temps de mettre un nom à cette structure !
Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble E muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une *loi de composition externe*, i.e. d'une application $\begin{cases} \mathbb{K} \times E \to E \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda.x \end{cases}$ telles que

1. $(E, +)$ est un groupe abélien
2. La loi externe est doublement distributive :
   - sur la loi $+$ de E : $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (x, y) \in E^2$,
   $$\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$$
   - sur la loi $+$ de $\mathbb{K}$: $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall x \in E$,
   $$(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$$
3. pour tout x de E, $1.x = x$
4. pour tous λ et μ de $\mathbb{K}$, $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$.

Les éléments de E sont appelés vecteurs, les éléments de $\mathbb{K}$ sont des scalaires.

Remarque 2

1. Le but de cette définition est de prolonger la géométrie du plan et de l'espace : on sait depuis la seconde que $3.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = 3.\overrightarrow{AB} + 3.\overrightarrow{CD}$.
2. On notera souvent λx au lieu de $\lambda.x$.

Exemple 3 (Tous ces exemples sont fondamentaux !)

1. Déjà $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-ev.
2. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

3. Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-ev, en posant

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \text{ et } \lambda.\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

4. $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
5. $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}(X)$ sont des $\mathbb{K}$-ev
6. Si A est un ensemble, $\mathbb{K}^A$ est un $\mathbb{K}$-ev en posant, si f et g sont dans $\mathbb{K}^A$,

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$$

   et si $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda.f : x \mapsto \lambda f(x).$$

7. Plus généralement, si E est un $\mathbb{K}$-ev, si A est un ensemble quelconque, E^A est un $\mathbb{K}$-ev avec les même opérations que précédemment.
8. Notamment, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sont des espaces vectoriels.

Comment passe-t-on facilement de $\mathbb{K}$ à $\mathbb{K}^n$? Grâce à la notion d'espace-vectoriel produit.

Définition 4

Soient $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_n$ n $\mathbb{K}$-ev. On définit sur $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ une structure de $\mathbb{K}$-ev par : $\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
$$\lambda.(x_1, \dots, x_n) = (\lambda.x_1, \dots, \lambda.x_n)$$

Exemple 5

$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont des exemples d'espaces vectoriels produit.

On a des règles de calcul évidentes qui se déduisent de la définition

Proposition 6

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$,

1. $\lambda.0_E = 0_E$.
2. $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$.
3. $(-1).x = -x$.
4. $\lambda.x = 0_E$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $x = 0_E$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Démonstration

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. ALors $\lambda.0_E = \lambda.(0_E + 0_E) = \lambda.0_E + \lambda.0_E$, donc, en soustrayant $\lambda.0_E$, $0_E = \lambda.0_E$.
2. Soit $x \in E$, $0_{\mathbb{K}}.x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}).x$, donc $0_{\mathbb{K}}.x + 0_{\mathbb{K}}.x = 0_{\mathbb{K}}.x$, donc $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$.
3. Soit $x \in E$, alors $x + (-1_{\mathbb{K}}).x = 1_{\mathbb{K}}.x + (-1_{\mathbb{K}}).x = 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$, donc $(-1_{\mathbb{K}}).x = -x$.
4. Si $\lambda.x = 0_E$ et $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, alors λ est inversible pour la loi $\times$ de $\mathbb{K}$, donc
$$\lambda^{-1}.(\lambda.x) = \lambda^{-1}.0_E,$$
donc $x = 0_E$, d'où le résultat !

■

Une des notions fondamentales de l'algèbre linéaire est la notion de combinaison linéaire.

Définition 7

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$, $(x_1, \dots, x_n)$ n éléments de E. On dit que x est combinaison linéaire de $(x_1, \dots, x_n)$ s'il existe n éléments de $\mathbb{K}$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que
$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Remarque 8

1. 0_E est CL de n'importe quelle famille de vecteurs.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, tout vecteur est combinaison linéaire de $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Si $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x.\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.
3. Dans $\mathbb{R}^2$, quelq sont les vecteurs CL de $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$? Ce sont tous les vecteurs u de $\mathbb{R}^2$ tels qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda.\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$: il s'agit de la première bissectrice.
On représente les vecteurs par des **points** !
4. Dans $\mathbb{R}^3$< $\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ est-il CL de $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et de $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$?
Il faut résoudre un système linéaire.
5. Plusieurs combinaisons linéaires différentes peuvent être égales au même vecteur : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ **N'IMPLIQUE PAS** que $\lambda_k = \mu_k$. Exemple :
$$\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

et

$$\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

6. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, tout polynôme est combinaison linéaire de :
   - $(1, X, X^2, \dots, X^n)$, par la définition même des polynômes,
   - $(1, X-a, (X-a)^2, \dots, (X-a)^n)$ par la formule de Taylor,
   - toute base d'interpolation de Lagrange.
7. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, sh et ch sont CL de $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$.

Exercice 9

On considère les vecteurs $u_1 = (2, -3, 4)$, $u_2 = (1, -2, 2)$, $v_1 = (2, 1, -1)$, $v_2 = (2, -1, 2)$ et $v_3 = (3, 0, 1)\}$.

1. On considère le vecteur $u = (1, 1, 2)$. Déterminer deux réels a et b tel que $u = a\ u_1 + b\ u_2$.
2. Soit le vecteur $v = (0, -1, 1)$. v est-il combinaison linéaire de u_1 et u_2 ?
3. Soit le vecteur $w = (4, 7, -9)$. Exprimer w comme combinaison linéaire de v_1, v_2 et v_3.

Exercice 10

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, les fonctions suivantes sont-elles combinaisons linéaires de sin et cos ?

- $x \mapsto \sin(x+1)$,
- $x \mapsto \sin(2x)$.

Remarque 11

Prenons $\mathbb{K}[X]$. On peut vouloir dire que tout polynôme est combinaison linéaire de $1, X, X^2, \dots$... Mais que veut-on dire exactement par là ? Par exemple $1 + X + X^2 + \dots$ (somme infinie) n'est pas un polynôme !
Question : peut-on parler de combinaison linéaire d'une famile infinie de vecteurs ? OUi, en définissant la notion de famille presque nulle.

Définition 12

On dit qu'une famille $(\lambda_i)_{i \in \mathrm{I}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ indexé par I (ensemble éventuellement infini) est presque nulle si tous les éléments de la famille sont nuls, sauf un nombre fini d'entre eux, i.e.

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \exists (i_1, \dots, i_n) \in \mathrm{I}^n,\ \forall i \in \mathrm{I},\ i \notin \{i_1, \dots, i_n\} \Rightarrow \lambda_i = 0.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Définition 13

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de E, $x \in E$, I un ensemble (éventuellement infini) et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. On dit que x est combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in I}$ s'il existe une famille presque nulle de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i.$$

(en particulier, la somme ci-dessus est finie !)

Remarque 14

Il faut toujours pouvoir exploiter concrètement cette notion dans des cas concrets : l'utilisation de familles presques nulles est là pour simplifier les démonstrations théoriques.

- si x est CL de $(x_1, \ldots, x_n)$, pas besoin de parler de famille presque nulle, on revient à la première définition,
- si x est CL de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on peut l'exprimer de deux manières :
  - $\exists(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nulle àpcr telle que $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k x_k$,
  - $\exists N \in \mathbb{N},\ (\lambda_0, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{K}^{N+1},\ x = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i x_i$.
- si x est CL de $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$, on peut être + concret quand même :

$$\exists N \in \mathbb{N}, (i_1, \ldots, i_N) \in \mathrm{I}^N,\ \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^N,\ x = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_{i_k}.$$

Exemple 15

Ainsi, tout élément de $\mathbb{K}[X]$ est CL des $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$, ou des $((X-\alpha)^k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Il y a un exemple dont nous n'avons pas parlé... Il s'agit de $\mathbb{K}_n[X]$. Et c'est parce que plutôt de le voir comme un espace vectoriel à part entière, on va le voir comme un sous-espace vectoriel ! (les sous-structures, c'est + sûr !)

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 16

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset E$. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E (on abrège en sev) si

1. F est stable par $+$ et .
2. F est un $\mathbb{K}$-ev.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Comme d'habitude, c'est la caractérisation suivante qui va être utile :

Proposition 17

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset E$. F est un sev de E ssi

1. F est non vide.
2. $\forall (x, y) \in E^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda x + \mu y \in E$.

Le deuxième point est remplaçable par $\forall (x, y) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x + y \in F$.

Proposition 18

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F un sev de E. Alors F est stable par combinaison linéaire quelconque, i.e.

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in F^n,\ \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in F.$$

Exemple 19 (Des exemples encore fondamentaux)

1. 0_E et E sont des sev de E. Attention, l'ensemble vide n'est pas un sev !
2. $\mathbb{R}$ est un sev du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$. En revanche, $\mathbb{R}$ n'est pas un sev du $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}$ (attention au corps de départ).
3. Toute droite du plan passant par 0 est un sev de $\mathbb{R}^2$. En revanche, une droite ne passant pas par 0 n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$.
4. Toute droite de l'espace ou tout plan de l'espace est un sev de $\mathbb{R}^3$.
5. L'ensemble des fonctions à régularité donnée est un sev de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
6. L'ensemble des solutions d'une équadiff homogène est un sev de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
7. L'ensemble des fonctions paries, ainsi que l'ensemble des fonctions impaires, sont des sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
8. L'ensemble des suites solutions d'une récurrence linéaire homogène est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
9. L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues est un sev de $\mathbb{R}^n$.
10. L'ensemble des matrices triangulaires supérieures, inférieures, symétriques, antisymétriques, est un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. En revanche $GL_n(\mathbb{K})$ n'est pas un sev (il ne contient déjà pas 0) !
11. $\mathbb{K}_n[X]$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Exercice 20

Montrer que l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ d'intégrale nulle est un sev de l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$.

Comment voit-on une droite de l'espace ? Comme une *intersection* de plans.

Proposition 21

Soit E un $\mathbb{K}$-ev

1. si F et G sont deux sev de E, $F \cap G$ est un sev de E.
2. si I est un ensemble et $(F_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une famille de sev de E, $\bigcap\limits_{i\in\mathrm{I}} F_i$ est un sev de E.
3. si F et G sont deux sev de E, $F \cup G$ est un sev de E, alors soit $F \subset G$, soit $G \subset F$.

Démonstration

1. $0_E \in F$, $0_E \in G$, donc $0_E \in F \cap G$, i.e. $F \cap G \neq \emptyset$.
   Soit $(x, y) \in (F \cap G)^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
   - $(x, y) \in F^2$ donc, comme F est un sev, $\lambda x + y \in F$,
   - de même, comme $(x, y) \in G^2$, $\lambda x + y \in G$.

   Donc $\lambda x + y \in F \cap G$.
2. - $\forall i \in \mathrm{I}$, $0_E \in F_i$, donc $0_E \in \bigcap\limits_{i\in\mathrm{I}} F_i$.
   - soit $(x, y) \in \left(\bigcap\limits_{i\in\mathrm{I}} F_i\right)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
     Soit $i \in \mathrm{I}$. On sait que $(x, y) \in F_i^2$ donc $\lambda x + y \in F_i$, donc $\lambda x + y \in \bigcap\limits_{i\in\mathrm{I}} F_i$.
3. $\boxed{\Leftarrow}$ si $F \subset G$, $F \cup G = G$, sev de E.
   Si $G \subset F$, $F \cup G = F$, sev de E.

   $\boxed{\Rightarrow}$ Si $F \cup G$ est un sev de E, supposons que $F \not\subset G$ et montrons que $G \subset F$.
   Soit $y \in G$.
   $x \in F \cup G$, $y \in F \cup G$ donc, comme $F \cup G$ est un s.e.v., $x + y \in F \cup G$:
   — ou bien $x + y \in F$, alors $x + y - x \in F$, donc $y \in F$,
   — ou bien $x + y \in G$, alors $x + y - y \in G$, donc $x \in G$, absurde !

   Donc $y \in G$, donc $G \subset F$.

■

Remarque 22

Comme la réunion de deux sev n'est pas un sev, on peut se demander comment transformer une réunion de deux sev en un sev. La question est alors de savoir quel est le plus petit sous-espace vectoriel contenant une partie de E.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Définition 23 (et prop)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, A une partie de E. Le sous-espace vectoriel engendré par A, noté $\mathrm{Vect}(A)$, est le sous-espace vectoriel défini par l'une des définitions équivalentes suivantes

1. (définition externe) $\mathrm{Vect}(A)$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels contenant A ($\mathrm{Vect}(A)$ est le plus petit sev contenant A)
2. (définition interne) $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A.

On définit de même le sous-espace vectoriel engendré par une famille de E.

Démonstration

Notons G l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A, $\mathcal{F}$ l'ensemble des sev de E contenant A, et $H = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$.

$\boxed{G \subset H}$ Soit $F \in \mathcal{F}$. Alors F est un sev de E, il contient A donc il continent toute combinaison linéaire d'éléments de A. En somme, il contient G. Donc $G \subset F$.
Donc $G \subset H$.

$\boxed{H \subset G}$ On va en fait montrer que $G \in \mathcal{F}$. Ainsi, H sera inclus dans G.

— G est bien un sev de E :
  — $0_E = \sum_{a \in A} 0_{\mathbb{K}}.a \in G$,
  — Soit $(x, y) \in G^2$, $\alpha \in \mathbb{K}$.
  On dispose de deux familles presque nulles $(\lambda_a)_{a \in A}$ et $(\mu_a)_{a \in A}$ telles que $x = \sum_{a \in A} \lambda_a.a$ et $y = \sum_{a \in A} \mu_a.a$.
  Or, $(\alpha.\lambda_a + \mu_a)_{a \in A}$ est presque nulle (nulle en-dehors des supports de $(\lambda_a)_{a \in A}$ et $(\mu_a)_{a \in A}$), donc
$$\alpha.x + y = \sum_{a \in A} (\alpha.\lambda_a + \mu_a).a$$
  est bien une combinaison linéaire d'éléments de A.

  Donc G est un sous-espace vectoriel de E.

— On montre que G contient A : si $x \in A$, $x = \sum_{a \in A} \lambda_a.a$ avec $\lambda_a = \delta_{ax}$, donc $x \in G$.

Donc G est un sev de E contenant A, donc $G \in \mathcal{F}$. Comme $H = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$, $H \subset G$.

D'où l'inclusion réciproque et l'égalité ! ■

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Notation 24

1. Dans le cas où $A = (x_i)_{i\in I}$, on notera $\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$.
2. Si A est un ensemble fini, i.e. $A = \{x_1, \dots, x_n\}$, ou une famille finie, i.e. $A = (x_1, \dots, x_n)$, on aura tendance à noter $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$: on retrouve la définition vue en tout début d'année !

Exemple 25

1. $\mathrm{Vect}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ est le plan d'équation $z = 0$.
2. $\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.
3. Attention à bien préciser le corps sur lequel on travaille ! Par exemple, $\mathrm{Vect}(1) = \mathbb{R}$ si on travaille sur un $\mathbb{R}$-ev, $\mathrm{Vect}(1) = \mathbb{C}$ si on travaille sur $\mathbb{C}$.
4. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, si on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires, $\mathrm{Vect}(\mathcal{P} \cup \mathcal{I}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Proposition 26 (Quelques notions sur les vect)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

1. Une partie A de E vérifie $A = \mathrm{Vect}(A)$ ssi A est un sev de E.
2. Si $A \subset B \subset E$, alors $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$.
3. Si $x \in \mathrm{Vect}(A)$, $\mathrm{Vect}(A \cup \{x\}) = \mathrm{Vect}(A)$.
4. Si y est une combinaison linéaire des vecteurs de $A \cup \{x\}$ avec un coefficient non nul devant x, alors $\mathrm{Vect}(A \cup \{x\}) = \mathrm{Vect}(A \cup \{y\})$.

Démonstration

1. Si $\mathrm{Vect}(A) = A$, comme $\mathrm{Vect}(A)$ est un sev, alors A est un sev.
   Si A est un sev, alors A est stable par CL, donc toutes les CL d'éléments de A sont dans A, donc $\mathrm{Vect}(A) \subset A$. Comme, par définition, $A \subset \mathrm{Vect}(A)$, on a l'égalité.
2. Si $A \subset B$, soit $x \in \mathrm{Vect}(A)$. Alors x est combinaison linéaire d'éléments de A, donc d'éléments de B, donc $x \in \mathrm{Vect}(B)$.
3. Si $x \in \mathrm{Vect}(A)$,
   - déjà, $A \subset A \cup \{x\}$, donc $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(A \cup \{x\})$.
   - ensuite, $A \subset \mathrm{Vect}(A)$, $x \in \mathrm{Vect}(A)$, donc $A \cup \{x\} \subset \mathrm{Vect}(A)$, donc $\mathrm{Vect}(A \cup \{x\}) \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{Vect}(A)) = \mathrm{Vect}(A)$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

4. Si $y \in \mathrm{Vect}(A \cup \{x\}$, par le point précédent, $\mathrm{Vect}(A \cup \{x\}) = \mathrm{Vect}(A \cup \{x\} \cup \{y\})$.
De plus, $y = \sum_{a \in A} \lambda_a.a + \mu.x$ avec $\mu \neq 0$, donc $x = \frac{1}{\mu} y - \sum_{a \in A} \frac{\lambda_a}{\mu}.a$, donc $x \in \mathrm{Vect}(A \cup \{y\})$, donc $\mathrm{Vect}(A \cup \{y\}) = \mathrm{Vect}(A \cup \{x\} \cup \{y\})$.
D'où $\mathrm{Vect}(A \cup \{y\}) = \mathrm{Vect}(A \cup \{x\})$.

■

Remarque 27

1. La troisième proposition peut s'interpréter comme : si $x \in \mathrm{Vect}(A \backslash \{x\})$, alors $\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}(A \backslash \{x\})$.
2. La dernière proposition permet de **faire des opérations élémentaires entre éléments d'un Vect** :
   - $\mathrm{Vect}((1,0,0),(1,0,1),(0,0,1)) = \mathrm{Vect}((1,0,0),(1,0,1))$.
   - Déterminons $\mathrm{Vect}(3, X+1, X^2-2X+5)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vect}(3, X+1, X^2-2X+5) &= \mathrm{Vect}(1, X+1, X^2-2X+5) \\
&\quad \text{car 1 est CL de } (3, X+1, X^2-2X+5) \text{ avec coeff} \neq 0 \text{ devant } 3 \\
&= \mathrm{Vect}(1, X+1-1, X^2-2X+5) \\
&= \mathrm{Vect}(1, X, X^2-2X+5) \\
&= \mathrm{Vect}(1, X, X^2) = \mathbb{K}_2[X].
\end{aligned}$$

Définition 28 (Adaptation aux familles de vecteurs)

La notion de réunion n'a pas vraiment de sens pour les familles de vecteurs : $(x, y) \cup (x, y)$ contient 2 ou 4 éléments ? Au lieu de cela, je vais utiliser un symbole « maison », la concaténation $\uplus$:

$$(x_1, \ldots, x_n) \uplus (y_1, \ldots, y_p) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p).$$

L'idéal, pour décrire un sous-espace vectoriel, est de le décrire comme engendré par un certain nombre de vecteurs (par le plus petit possible notamment !) C'est pour cela que l'on va parler de familles de vecteurs.

1.3 Familles de vecteurs

On va définir trois notions essentielles : la notion de famille génératrice (déjà amorcée précédemment), celle de famille libre, et enfin celle de base.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Définition 29

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Une partie A de E est dite génératrice de E si $E = \mathrm{Vect}(A)$.
Une famille $\{x_i, i \in I\}$ de E est dite génératrice de E si $E = \mathrm{Vect}(x_i)_{i \in I}$.

Remarque 30

1. A est génératrice de E si tout élément de E s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de A.
2. Il faut pouvoir traduire cette définition dans les cas fini, indexé sur $\mathbb{N}$, et quelconque.
   - cas fini. $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice de E si
   $$\forall y \in E,\ \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$$
   - cas indexé sur $\mathbb{N}$. $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est génératrice de E si
   $$\forall y \in E,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \exists (\lambda_0, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{K}^{N+1},\ y = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k x_k.$$
   - cas quelconque. $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est génératrice de E si
   $$\forall y \in E,\ \exists (\lambda_i)_{i \in \mathrm{I}} \in \mathbb{K}^{\mathrm{I}} \text{ presque nulle telle que } y = \sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i x_i$$
   ou
   $$\forall y \in E,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \exists (i_1, \dots, i_N) \in \mathrm{I}^N,\ \exists (\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant N} \in \mathbb{K}^N,\ y = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_{i_k}.$$

Exemple 31

1. E est toujours génératrice de E.
2. Dans $\mathbb{R}^2$,
   - $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$,
   - $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est aussi génératrice de $\mathbb{R}^2$,
   - $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.
3. Exemples matriciels.
   (a) une famille génératrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est $(E_{ab})_{1 \leqslant a,b \leqslant n}$,
   (b) une famille génératrice de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est $(E_{ab})_{1 \leqslant a \leqslant b \leqslant n}$,

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

(c) une famille génératrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est $(E_{ab}+E_{ba})_{1\leqslant a,b\leqslant n}$.
Remarque importante : dans cette famille, on compte des éléments en double ! Mais ce n'est pas grave.

4. Exemples polynomiaux.

(a) La famille (X^k) est génératrice de $\mathbb{K}[X]$.

(b) L'ensemble des polynômes unitaires est une partie génératrice de $\mathbb{K}[X]$.

En vue du chapitre qui va suivre, il faut comprendre le genre de manipulations que l'on peut faire sur les familles génératrices et les Vect, et adapter la proposition de la section précédente.

Proposition 32

Soit E un $\mathbb{K}$-ev,

1. Si $A\subset B\subset E$, et A est génératrice de E alors B est génératrice.
2. Si $x\in\mathrm{Vect}(A)$, et $A\cup\{x\}$ est génératrice, alors A est génératrice.
3. Si y est une combinaison linéaire des vecteurs de $A\cup\{x\}$ avec un coefficient non nul devant x, et $A\cup\{x\}$ est génératrice, alors $A\cup\{y\}$ est génératrice.

Remarque 33

On adapte la proposition avec des familles, en remplaçant $\cup$ par $\uplus$

Exercice 34

La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Point de méthode 35

Dans $\mathbb{R}^n$, pour savoir si une famille est génératrice, on résout un système linéaire avec second membre.

Point de méthode 36

Une chose utile à laquelle penser pour les familles génératrices : si $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une famille génératrice de E et $(y_j)_{j\in J}$ est une famille de E, pour montrer que $(y_j)_{j\in J}$ est génératrice de E, il suffit de montrer que chacun des $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est combinaison linéaire des $(y_j)_{j\in J}$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Remarque 37

Avec une famille génératrice, on n'a pas nécessairement unicité de la décomposition. C'est pour cela que l'on introduit la notion de...

Définition 38 (Famille libre)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $\{x_i, i \in \mathrm{I}\}$ une famille de vecteurs de E. $\{x_i, i \in \mathrm{I}\}$ est dite libre si pour toute famille presque nulle $\{\lambda_i, i \in \mathrm{I}\}$ d'éléments de $\mathbb{K}$,

$$\left(\sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i x_i = 0\right) \Rightarrow (\forall i \in \mathrm{I},\ \lambda_i = 0)\,.$$

Remarque 39

Il faut pouvoir encore traduire cette proposition dans différents cas :

1. Cas fini. $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ est libre si et seulement si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k = 0$$

2. Cas indexé sur $\mathbb{N}$. $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est libre si et seulement si

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall (\lambda_0, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{K}^{N+1},\ \sum_{k=0}^{N} \lambda_k x_k = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![0, n]\!],\ \lambda_k = 0.$$

3. Cas général. $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est libre si et seulement si

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall (i_1, \dots, i_N) \in \mathrm{I}^{\mathbb{N}},\ \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{K}^N,\ \sum_{k=0}^{N} \lambda_k x_{i_k} = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![1, N]\!],\ \lambda_k = 0.$$

Exemple 40

1. Une famille contenant 0 n'est jamais libre ; de même pour une famille contenant deux fois le même vecteur.
2. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)$ est-elle libre ?
3. Étudier la liberté de $\{(2,1,-1),\ (2,-1,2),\ (3,0,1)\}$ Moralité : dans de nombreux cas, chercher la liberté revient à résoudre un système linéaire homogène.
4. Montrer que $\{x \mapsto \sin(x),\ x \mapsto \sin(2x),\ x \mapsto \sin(3x)\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Définition 41

1. Si une famille n'est pas libre, on dit qu'elle est liée.
2. Une combinaison linéaire nulle à coefficient non tous nuls d'une famille non libre est appelée **relation de liaison** entre les éléments de cette famille
3. Deux vecteurs liés sont dits colinéaires. Trois vecteurs liés sont dits coplanaires.

Proposition 42

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille d'éléments de E.

1. Si $\exists i_0 \in \mathrm{I},\ x_{i_0} = 0_E$, $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est liée.
2. Si $\exists (i,j) \in \mathrm{I}^2,\ i \neq j$ et $x_i = x_j$, $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est liée.
3. $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est liée si et seulement s'il existe $i_0 \in \mathrm{I}$ tel que x_{i_0} est combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in \mathrm{I}\setminus\{i_0\}}$.
4. Si $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est libre et que $y \notin \mathrm{Vect}(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$, alors $(x_i)_{i\in \mathrm{I}} \uplus \{y\}$ est libre.
5. $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est libre si et seulement si tout élément de $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$.

Démonstration

1. Si on dispose de i_0 tel que $x_{i_0} = 0$, alors $1.x_{i_0} = 0_E$ est une relation de liaison.
2. Si on dispose de $(i,j) \in \mathrm{I}^2$ tels que $u \neq j$ et $x_i = x_j$, alors $1.x_i - 1.x_j = 0_E$ est une relation de liaison.
3. $\boxed{\Rightarrow}$ Si $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est liée, on dispose de $(\lambda_i)_{i\in \mathrm{I}}$ famille presque nulle, non identiquement nulle, telle que
$$\sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i x_i = 0.$$
On dispose alors de $i_0 \in \mathrm{I}$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. Donc
$$x_{i_0} = \sum_{i\in \mathrm{I}\setminus\{i_0\}} \frac{-\lambda_i}{\lambda_{i_0}} x_i,$$
donc x_{i_0} est combinaison linéaire de $(x_i)_{i\in \mathrm{I}\setminus\{i_0\}}$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Si on dispose de i_0 tel que x_{i_0} est combinaison linéaire de $(x_i)_{i\in \mathrm{I}\setminus\{i_0\}}$, alors on dispose de $(\mu_i)_{i\in \mathrm{I}\setminus\{i_0\}}$ presque nulle telle que
$$x_{i_0} = \sum_{i\in \mathrm{I}\setminus\{i_0\}} \mu_i x_i.$$
Mais alors
$$\sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i x_i = 0,$$
en posant $\lambda_{i_0} = -1$ et, si $i \neq i_0$, $\lambda_i = \mu_i$, et la famille $(\lambda_i)_{i\in \mathrm{I}}$ n'est pas identiquement nulle. On a donc une relation de liaison, la famille est liée.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

4. On suppose que $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est libre et que $y \notin \mathrm{Vect}(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$.
Soit $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ presque nulle et $\mu \in \mathbb{K}$ tels que $\sum\limits_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i x_i + \mu y = 0$.

- si $\mu \neq 0$, alors $y = \sum\limits_{i\in\mathrm{I}} \frac{-\lambda_i}{\mu} x_i \in \mathrm{Vect}(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$, absurde.
  Donc $\mu = 0$.
- Donc $\sum\limits_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i x_i = 0$.
  Par liberté de la famille, il vient : $\forall i \in \mathrm{I},\ \lambda_i = 0$.

Donc $(x_i)_{i\in\mathrm{I}} \uplus \{y\}$ est libre.

5. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ libre. Soit $y \in \mathrm{Vect}(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$. On suppose que l'on dispose de deux familles presque nulles, $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et $(\mu_i)_{i\in\mathrm{I}}$, telles que

$$y = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i x_i = \sum_{i\in\mathrm{I}} \mu_i x_i$$

Alors

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0,$$

donc, par liberté de la famille, $\forall i \in \mathrm{I},\ \lambda_i - \mu_i = 0$, i.e $\forall i \in \mathrm{I},\ \lambda_i = \mu_i$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que tout élément de $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$. Soit $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ presque nulle telle que

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i x_i = 0_E$$

Or, $0_E = \sum\limits_{i\in\mathrm{I}} 0_{\mathbb{K}} x_i$. Par unicité de la décomposition, pour tout i dans I, $\lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$. Donc la famille est libre.

■

Remarque 43

C'est la liberté d'une famille qui permet l'« identification » des coefficients dans une combinaison linéaire.

Un dernier exemple important :

Définition 44

Soit $P_1, \dots, P_n$ une famille de poynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que les degrés des P_k sont échelonnés si $\deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_n)$.
De même, si $(P_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]^{\mathbb{N}}$, on dit que $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est à degrés échelonnés si $\forall k \in \mathbb{N},\ \deg(P_k) < \deg(P_{k+1})$.

Proposition 45 (HP – utilisable librement en sup)

Toute famille de polynômes non nuls, à degrés échelonnés est libre.

Démonstration (On ne fait que le cas fini)

Soit $(P_0, \dots, P_n) \in \mathbb{K}[X]^{n+1}$ telle que $0 \leqslant \deg(P_0) < \cdots < \deg(P_n)$.

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ telle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0$.

Notons, pour tout k dans $[\![0, n]\!]$, d_k le degré de P_k et c_k son coefficient dominant.

- **Méthode 1.** On montre par récurrence sur $k \in [\![0, n]\!]$ que $\mathcal{P}_k : \lambda_n = \lambda_{n-1} = \cdots = \lambda_{n-k} = 0$.
  - **Initialisation.** Comme $\deg(P_n) = d_n$ et $d_n > \deg\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P_k\right)$, le monôme de degré d_n de $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$ est $\lambda_n c_n X^{d_n}$.Il est nul, c_n est non nul, donc $\lambda_n = 0$. D'où $\mathcal{P}_0$.
  - **Hérédité.** Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\mathcal{P}_k$ est vraie. Alors $\lambda_n = \cdots = \lambda_{n-k} = 0$.
    Alors $R = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-k-1} \lambda_k P_j = 0$.
    On sait que $deg(P_{n-k-1}) > \deg\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n-k-2} \lambda_j P_j\right)$ donc le monôme de degré d_{n-k-1} de R est $\lambda_{n-k-1} c_{n-k-1} X^{d_{n-k-1}}$.
    Comme $R = 0$, $\lambda_{n-k-1} c_{n-k-1} = 0$, donc $\lambda_{n-k-1} = 0$, d'où $\mathcal{P}_{k+1}$, l'hérédité.

  D'où le résultat : $\lambda_n = \cdots = \lambda_0 = 0$.
  Donc $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre.
- **Méthode 2.** On pose $A = \{k \in [\![0, n]\!],\ \lambda_k \neq 0\}$. Il faut montrer que $A = \emptyset$. Par l'absurde, on suppose que $A \neq \emptyset$. A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, majorée par n, donc A admet un plus grand élément j. Ainsi, $\lambda_j \neq 0$ et $\lambda_{j+1} = \cdots = \lambda_n = 0$.

  Donc $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \lambda_i P_i = 0$.

  Or, $\deg(P_j) > \deg\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{j-1} \lambda_i P_i\right)$, donc le monôme de degré d_j dans $\displaystyle\sum_{i=0}^{j} \lambda_i P_i$ est $\lambda_j c_j X^{d_j}$, donc, comme $\displaystyle\sum_{i=0}^{j} \lambda_i P_i = 0$, $\lambda_j c_j = 0$, donc $\lambda_j = 0$, absurde car $j \in A$!

  Donc $A = \emptyset$, donc $\lambda_n = \cdots = \lambda_0 = 0$. Donc $(P_0, \dots, P_n)$ est libre.

■

Corollaire 46

Toute famille de polynômes à degrés deux à deux distincts est libre.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Remarque 47

1. Ainsi, si $\alpha \in \mathbb{K}$, la famille $((X-\alpha)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libres.
2. De même, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la famille des polynômes de Tchebycheff, est libre.
3. La condition « être à degrés échelonnés » est une condition suffisante pour être libre, mais pas nécessaire. Ainsi, si $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, deux à deux distincts, si $(L_0, \dots, L_n)$ est la base d'interpolation de Lagrange associée, la famille est libre (exo !) mais les polynômes sont tous de même degré.

Exercice 48 (Méthode similaire)

On définit, pour tout α dans $\mathbb{R}$, $f_\alpha : x \mapsto e^{\alpha x}$. Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Remarque 49

Moralité : une famille $\mathcal{F} = \{x_i, i \in I\}$ est génératrice de E si tout vecteur de E s'écrit comme au moins une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$. Elle est libre si tout élément qui est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$ s'écrit de manière unique comme CL des x_i. Il vient alors naturellement la notion de *base* d'un espace vectoriel.

Définition 50

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Une famille $\mathcal{B} = (x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de E est une base de E si elle est libre et si c'est une famille génératrice de E.

Proposition 51

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de vecteurs de E.

1. $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est génératrice si et seulement si pour tout y de E, il existe **au moins** une famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ telle que $y = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i x_i$.
2. $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est libre si et seulement si pour tout y de E, il existe **au plus** une famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ telle que $y = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i x_i$.
3. $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une base de E si et seulement si pour tout y de E, il existe **exactement** une famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ telle que $y = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i x_i$.

Remarque 52

1. Traduction pour un nombre fini de vecteurs : $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E ssi $\forall y \in$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

$E,\ \exists!(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\ y=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i.$

2. L'existence de bases dans un espace vectoriel quelconque n'est pas évidente (on la démontrera dnas un cas particulier au chapitre suivant) : en général, on a besoin de l'axiome du choix.

3. Exemples fondamentaux : les bases canoniques

- Dans $\mathbb{K}^n$, la base canonique est la base

$$(e_1,\ldots,e_n),\text{ où } e_i=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},$$

  avec tous les coefficients non nuls, sauf celui de la i-ème ligne.
- Dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, les matrices $(E_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ constituent la base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Dans $\mathbb{K}[X]$, la base canonique est $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$.
- Dans $\mathbb{K}_n[X]$, la base canonique est $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

4. Dans $\mathbb{R}^2$, deux vecteurs non colinéaires forment une base.
Dans $\mathbb{R}^3$, trois vecteurs non coplanaires forment une base.

5. Autres bases de polynômes

- $((X-\alpha)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, libre car à degrés échelonnés, génératrice par la formule de Taylor.
- Dans $\mathbb{K}_n[X]$, si $(x_0,\ldots,x_n)\in\mathbb{K}^{n+1}$, la base d'interpolation associée $(L_0,\ldots,L_n)$ est une base : on a démontré qu'elle était libre plus tôt, et elle est génératrice par la formule d'interpolation de Lagrange.

6. Bases de matrices :

- Une base de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est $(E_{ab})_{1\leqslant a\leqslant b\leqslant n}$.
- Une base de $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ est $(E_{ab})_{1\leqslant b\leqslant a\leqslant n}$.
- Une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est $(E_{aa})_{1\leqslant a\leqslant n}$
- Une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est $(E_{ab}+E_{ba})_{1\leqslant a<b\leqslant n}\uplus(E_{aa})_{1\leqslant a\leqslant n}$.
- Une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est $(E_{ab}-E_{ba})_{1\leqslant a<b\leqslant b}$.

7. Attention au corps dans lequel on se place :

- une base de $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$ est $(1,i)$: $\forall z\in\mathbb{C},\ \exists!(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ z=x.1+y.i$.
- une base du $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}$ est (1) : $\forall z\in\mathbb{C}, z=z.1$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

1.4 Somme d'un nombre fini de sous-espaces

Les bases permettent de comprendre assez simplement comment se structure un espace vectoriel. Mais avant de trouver une base, ou plutôt que de chercher une base, il peut être utile de séparer de manière plus simple l'espace.
Faire des dessins de somme et de supplémentaires.

Définition 53

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sev de E. La somme de F et de G, notée $F+G$, est le sous-espace vectoriel suivant

$$F+G=\{f+g,\ f\in F, g\in G\}.$$

Exemple 54

1. Dans $\mathbb{R}^2$, la somme de deux droites non confondues est égale à tout $\mathbb{R}^2$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, si $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, alors $F+G = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix},\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$.
3. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})+\mathcal{A}_n(\mathbb{K})=\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, car toute matrice s'écrit comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Proposition 55

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sev de E.

1. $F+G$ est un sev de E.
2. $F+G=\mathrm{Vect}(F\cup G)$.
3. De manière plus générale, si A, B sont des parties de E, $\mathrm{Vect}(A\cup B)=\mathrm{Vect}(A)+\mathrm{Vect}(B)$.

Démonstration

1. $0_E\in F$, $0_E\in G$ donc $0_E=0_E+0_E\in F+G$.
Soit $(u,v)\in(F+G)^2$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$. Alors on dispose de $(f,g)\in F\times G$, de $(f',g')\in F\times G$ tels que $u=f+g$ et $v=f'+g'$. Donc
$$\lambda u+\mu v=\lambda f=\lambda g+\mu f'+\mu g'=\underbrace{(\lambda f+\mu f')}_{\in F}+\underbrace{(\lambda g+\mu g')}_{\in G}\in F+G.$$
Donc $F+G$ est un sev de E.
2. $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $u\in F+G$. ALors on dispose de $(f,g)\in F|timesG$ tels que $u=f+g$. $f\in F\cup G$, $g\in F\cup G$ donc $f+g\in\mathrm{Vect}(F\cup G)$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

$\boxed{\Leftarrow}$ $F \subset F+G$, $G \subset F+G$ donc $F \cup G \subset F+G$, donc $\mathrm{Vect}(F \cup G) \subset \mathrm{Vect}(F+G)$. Mais $F+G$ est un sous-espace vectoriel, donc $\mathrm{Vect}(F+G) = F+G$.

D'où l'inclusion réciproque et l'égalité !

3. La même chose !

■

Définition 56

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sev de E. La somme entre F et G est dite directe si pour tout x de $F+G$ il existe un unique f de F et un unique g de G tels que $x = f+g$. On note alors la somme $F \oplus G$.

Exemple 57

1. La somme de deux plans dans $\mathbb{R}^3$ n'est pas directe. Par exemple, si
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ x = 0 \right\} \text{ et } G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ y = 0 \right\},$$
alors
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \dots$$
2. La somme $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) + \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ n'est pas directe :
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
3. La somme $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est directe car on a montré que toute matrice s'écrivait **de manière unique** comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Proposition 58

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sev de E. F et G sont en somme directe si, et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que la somme est directe. Soit $x \in F \cap G$, montrons que $x = 0_E$.
$x \in F \cap G$ donc $x \in F \oplus G$, donc
$$x = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G} = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

donc, par unicité de la décomposition de $x = f + g$, on a $x = 0_E$. Donc $F \cap G = \{0_E\}$. (l'autre inclusion est évidente)

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $F \cap G = \{0_E\}$. Soit $x \in F + G$, $(f, g) \in F \times G$, $(f', g') \in F \times G$, tels que $x = f + g = f' + g'$. Alors $f - f' = g' - g$. Mais $f - f' \in F$ et $g' - g \in G$, donc $f - f' \in F \cap G = \{0_E\}$, donc $f - f' = 0_E$, i.e. $f = f'$, et $g = g'$. D'où l'unicité de l'écriture de x comme un élément de F + un élément de G.

■

Définition 59

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sev de E. F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $F \oplus G = E$, i.e.

$$\forall x \in E,\ \exists!(f, g) \in F \times G,\ x = f + g.$$

Exemple 60

1. Deux droites de $\mathbb{R}^2$ non confondues sont supplémentaires.
   Si $F = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $G = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $H = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, F et G sont supplémentaires, mais F et H sont aussi supplémentaires, de même que G et H.
   Il n'y a donc pas unicité d'un supplémentaire !
2. Ne pas confondre supplémentaire et complémentaire : $E \backslash F$ n'est jamais un sous-espace vectoriel (ne contient pas 0_E).
3. Deux droites de $\mathbb{R}^3$ non confondues sont en somme directe, mais pas supplémentaires.
4. $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K}) + \mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$, mais la somme n'est pas directe, donc les deux espaces ne sont pas supplémentaires.
5. $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
6. Les fonctions paires et les fonctions impaires sont supplémentaires dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Point de méthode 61

Pour montrer que deux sev sont supplémentaires, deux méthodes possibles

1. ou bien on montre séparément que $F + G = E$ et $F|capG = \{0_E\}$.
   Exercice. Si $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices supérieures de diagonale nulle, montrer que $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. ou bien on raisonne par **analyse-synthèse** :
   - l'analyse démontre l'unicité d'une décomposition, donc le caractère direct de la somme,
   - la synthèse démontre l'existence, donc le fait que la somme vaut bien E.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Exercice. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$, G l'ensemble des fonctions constantes. Démontrer que $E = F \oplus G$.

Proposition 62

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sev de E.

1. Si $\{f_i, i \in I\}$ est une famille génératrice de F et $\{g_j, j \in J\}$ est une famille génératrice de G, alors $\{f_i, i \in I\} \uplus \{g_j, j \in J\}$ est une famille génératrice de $F + G$.
2. Si F et G sont en somme directe, si $\{f_i, i \in I\}$ est une famille libre de F et $\{g_j, j \in J\}$ est une famille libre de G, alors $\{f_i, i \in I\} \uplus \{g_j, j \in J\}$ est une famille libre de $F \oplus G$.
3. Si $\{f_i, i \in I\}$ est une base de F et $\{g_j, j \in J\}$ est une base de G, alors F et G sont supplémentaires **si et seulement si** $\{f_i, i \in I\} \uplus \{g_j, j \in J\}$ est une base de E.

Démonstration

1. Soit $x \in F + G$. Alors on dispose de $u \in F$, de $v \in G$, tels que $x = u + v$.
   - $u \in F$ donc on dispose de $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ presque nulle telle que $u = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i f_i$.
   - $v \in G$ donc on dispose de $(\mu_j)_{j\in J}$ presque nulle telle que $v = \sum_{j\in J} \mu_j g_j$.

   Ainsi, $x = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i f_i + \sum_{j\in J} \mu_j g_j$, combinaison linéaire d'éléments de $\{f_i, i \in I\} \uplus \{g_j, j \in J\}$.
   Donc $\{f_i, i \in I\} \uplus \{g_j, j \in J\}$ est génératrice de E.
2. Soient $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et $(\mu_j)_{j\in J}$ presque nulles telles que
   $$\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i f_i + \sum_{j\in J} \mu_j g_j = 0_E$$
   Alors
   $$\underbrace{\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i f_i}_{\in F} = \underbrace{-\sum_{j\in J} \mu_j g_j}_{\in G}$$
   Or, comme $F \cap G = \{0_E\}$, $\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i f_i = 0_E$ et $\sum_{j\in J} \mu_j g_j = 0_E$.
   Donc, par liberté de $(f_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et de $(g_j)_{j\in J}$, on en déduit que
   $$\forall i \in \mathrm{I},\ \lambda_i = 0 \text{ et } \forall j \in J,\ \mu_j = 0.$$
   Donc la famille concaténée est libre.
3. $\boxed{\Leftarrow}$ La réciproque vient des deux points précédents.
   $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $\{f_i, i \in I\} \uplus \{g_j, j \in J\}$ est une base de E :

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

— si $x \in E$, par le caractère générateur de la famille, on dispose de $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et de $(\mu_j)_{j\in J}$ presque nulles telles que

$$x = \underbrace{\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i f_i}_{\in F} + \underbrace{\sum_{j\in J} \mu_j g_j}_{\in G} \in F + G$$

Donc $E = F + G$.

— soit $x \in F \cap G$. Alors on dispose de $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et de $(\mu_j)_{j\in J}$ presque nulles telles que

$$x = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i f_i = \sum_{j\in J} \mu_j g_j.$$

Donc

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i f_i + \sum_{j\in J} (-\mu_j) g_j = 0_E.$$

Donc, par liberté de la famille $\{f_i, i \in I\} \uplus \{g_j, j \in J\}$, on en déduit que $\forall i \in \mathrm{I},\ \lambda_i = 0$ et que $\forall j \in J,\ \mu_j = 0$. Ainsi, $x = 0_E$.

D'où $F \oplus G = E$.

■

Comment étendre la définition à un nombre quelconque d'espaces vectoriels ?

Proposition 63 (Associativité de la somme)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F, G et H 3 sous-espaces vectoriels de E.

1. $F + (G + H) = (F + G) + H$
2. Si $G \cap H = \{0_E\}$, si $F \cap (G \oplus H) = \{0_E\}$, alors $F \cap G = \{0_E\}$ et $(F \oplus G) \cap H = \{0_E\}$.

Définition 64

Dans ce cas, on dit que F, G et H sont en somme directe et on note la somme directe

$$F \oplus G \oplus H$$

(sans parenthèse)

Démonstration

1. On écrit

$$\begin{aligned} F + (G + H) &= \{f + k,\ f \in F,\ k \in G + H\} \\ &= \{f + g + h,\ f \in G,\ g \in G,\ h \in H\} \\ &= \{\ell + h,\ \ell \in F + G,\ h \in H\} \\ &= (F + G) + H. \end{aligned}$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

2. Soit $x \in F \cap G$. Alors $x \in G$ et $x \in G \subset G \oplus H$.
Donc $x \in F \cap (G \oplus H) = \{0_E\}$, donc $x = 0_E$.
Soit $x \in (F \oplus G) \cap H$. Alors on dispose de $(f, g, h) \in F \times G \times H$ tels que $x = f + g$ et $x = h$.
Donc $f + g = h$, donc $f = -g + h$, donc $f \in (G \oplus H) \cap F = \{0_E\}$.
Donc $f = 0_E$, donc $g = h$, donc $g \in G \cap H = \{0_E\}$, donc $g = 0_E$.
Donc $x = 0_E$.

■

Définition 65

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $(F_1, \dots, F_n)$ n sous-espaces vectoriels de E.

1. On définit la somme $F_1 + \dots + F_n$ parfois notée $\sum_{i=1}^{n} F_i$ par

$$F_1 + \dots + F_n = \{f_1 + \dots + f_n,\ (f_1, \dots, f_n) \in F_1 \times \dots \times F_n\}$$

Elle est aussi égale à

$$F_1 + \Big(F_1 + (F_3 + \dots)\Big).$$

2. On dit que la somme est directe si
   - $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$,
   - $(F_1 \oplus F_2) \cap F_3 = \{0_E\}$,
   - $\dots$,
   - $(F_1 \oplus \dots \oplus F_{n-1}) \cap F_n = \{0_E\}$.

   et on note cette somme $F_1 \oplus \dots \oplus F_n$ ou $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

Proposition 66

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $F_1, \dots, F_n$ n sev de E. Les ASSE

1. La somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe.
2. $\forall x \in F_1 + \dots + F_n$, $\exists! (f_1, \dots, f_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} f_i$.
3. Pour tous $x_1, \dots, x_n$ dans $F_1 \times \dots \times F_n$,

$$x_1 + \dots + x_n = 0 \Rightarrow x_1 = \dots = x_n = 0.$$

Démonstration

On admet la preuve. ■

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Exemple 67

1. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{T}_n^{--}(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.
2. Il n'y a plus l'équivalence « somme directe » $\Leftrightarrow$ « intersection nulle » . Ainsi, trois droites dans $\mathbb{R}^2$ ne sont pas en somme directe, mais leurs intersections (2 à 2) sont nulles.

Le but de cette théorie des espaces vectoriels est d'étudier les applications qui vont bien avec les espaces vectoriels : ce sont les applications linéaires.

2 Applications linéaires

L'avantage de la structure d'espace vectoriel c'est qu'on peut tout ramener à l'étude de quelques éléments (bases, espaces supplémentaires, etc.). On va voir quelles applications se comportent bien avec cette structure.

2.1 Généralités

Définition 68

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev.

1. Une *application linéaire* entre E et F est une application $f : E \to F$ telle que
$$\forall (x,y) \in E^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$
On peut remplacer la proposition précédente par
$$\forall (x,y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}^2,\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$
On nomme l'ensemble des applications linéaires de E dans F $\mathscr{L}(E,F)$.
2. Un *endomorphisme* est une application linéaire de E dans E. On note leur ensemble $\mathscr{L}(E)$.
3. Un *isomorphisme* est une application linéaire bijective.
4. Un *automorphisme* est un endomorphisme bijectif. L'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel E est appelé groupe linéaire et noté $GL(E)$.
5. Une *forme linéaire* est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Proposition 69

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. $f(0_E) = 0_F$.
2. $\forall (x_i)_{i \in \mathrm{I}} \in E^{\mathrm{I}}$, $\forall (\lambda_i)_{i \in \mathrm{I}} \in \mathbb{K}^{\mathrm{I}}$ presque nulle,

$$f\left(\sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i f(x_i).$$

Démonstration

1. $f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E)$, donc $0_F = f(0_E)$.
2. La preuve se fait par récurrence sur le nombre de termes que l'on somme.

■

Exemple 70 (Plein d'exemples fondamentaux)

1. $\mathrm{Id}_E : E \to E$ est linéaire de E dans E, et bijective, donc $\mathrm{Id}_E \in GL(E)$.
2. Si $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$\lambda.\mathrm{Id}_E : \left| \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto \lambda.x \end{array} \right. \text{ est linéaire.}$$
Soit en effet $(x, y) \in E^2$, $\mu \in \mathbb{K}$. ALors
$$\begin{aligned} \lambda.\mathrm{Id}_E(x + \mu y) &= \lambda.(x + \mu.y) \\ &= \lambda.x + \mu\lambda.y = \lambda.\mathrm{Id}_E(x) + \mu\lambda.\mathrm{Id}_E(y). \end{aligned}$$
Ces applications sont appelées homothéties.
3. Démontrer que l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.
4. (notre contre-exemple adoré) L'application
$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{E}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$
5. L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (2x + 1, x - 2y - 2, x + y)$ n'est pas une application linéaire !
6. La conjugaison est un automorphisme du $\mathbb{R}$-ev, comme du $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}$.
7. La dérivation est une application linéaire de $\mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}^0(\mathbb{R})$, ou de $\mathbb{K}_n$ dans $\mathbb{K}_{n-1}$, ou bien un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
8. L'application d'évaluation en un point est une forme linéaire de $\mathbb{K}[X]$ ou de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
9. L'application définie par $\varphi : f \in \mathbb{C}^0([0, 1]) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ est une forme linéaire.

Remarque 71

Comment démontrer simplement que
$$\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix} 2x + y \end{array} \right.$$
est linéaire ? On écrit **matriciellement** cette application :
$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
La linéarité vient juste de la distributivité du produit matriciel.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Définition 72

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application

$$\left| \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \mapsto & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$$

est linéaire et est appelée application canoniquement associée à A.

Exercice 73

Un exercice et une méthode importants.
Soit, n un entier naturel. Soit φ l'application définie par, pour tout P dans $\mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) = XP'(X) - 2P(X+1)$. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
—
Attention ! Il faut montrer ENDO (c'est-à-dire que l'application est de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$) et MORPHISME (c'est-à-dire montrer que l'application est linéaire)
Soit P dans $\mathbb{R}_n[X]$. Alors

$$\deg(\varphi(P)) \leqslant \max(\deg(XP'(X)), \deg(2P(X+1)) \leqslant \max(1+n-1, n) \leqslant n,$$

donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Donc φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.
Soient P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$, λ dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + Q) &= X(\lambda P + Q)'(X) - 2(\lambda P + Q)(X+1) \\ &= \lambda X P'(X) + XQ'(X) - \lambda.2P(X+1) - 2Q(X+1) \text{ par linéarité de la dérivation et de l'évaluation.} \\ &= \lambda(XP' - 2P) + XQ' - 2Q \\ &= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q), \end{aligned}$$

d'où la linéarité de φ.
Donc φ est un endomorphisme.

Définition 74 (Opération sur les applications linéaires)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, f et g deux éléments de $\mathscr{L}(E, F)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. On définit $f + g$ par $\forall x \in E,\ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
2. On définit $\lambda.f$ par $\forall x \in E,\ (\lambda.f)(x) = \lambda.(f(x))$.

On munit ainsi $\mathscr{L}(E, F)$ d'une structure d'espace vectoriel.

Démonstration

Preuve admise. ■

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Proposition 75

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev, f dans $\mathscr{L}(E, F)$, g dans $\mathscr{L}(F, G)$.

1. $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.
2. Si u est dans $\mathscr{L}(E, F)$ et v est dans $\mathscr{L}(F, G)$, $g \circ (f + u) = g \circ f + g \circ u$ et $(g + v) \circ f = g \circ f + v \circ f$.

Démonstration

1. Soit $(x, y) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{aligned} g \circ f(\lambda.x + y) &= g(f(\lambda.x + y)) = g(\lambda f(x) + f(y)) \text{ car } f \text{ est linéaire} \\ &= \lambda g(f(x)) + g(f(y)) \text{ car } g \text{ est linéaire} \\ &= \lambda g \circ f(x) + g \circ f(y), \end{aligned}$$

   donc $g \circ f$ est linéaire.
2. Pour démontrer des égalités entre applications, on revient aux éléments ! Soit x dans E. Alors

$$g \circ (f + u)(x) = g(f(x) + u(x)) = g(f(x)) + g(u(x)) = g \circ f(x) + g \circ u(x),$$

   donc $g \circ (f + u) = g \circ u + g \circ u$, et

$$(g + v) \circ f(x) = g(f(x)) + v(f(x)) = g \circ f(x) + v \circ f(x)$$

   donc $(g + v) \circ f = g \circ g + v \circ f$.

■

Proposition 76

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est un anneau, non intègte et non commutatif.

Démonstration

Pour la non-intégrité, on sort notre contre-exemple fétiche :

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Alors si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

$$f \circ f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)}$.
Pour la non-commutativité, si

$$g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \end{array} \right. ,$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

$$g \circ f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} \text{ et } f \circ g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix},$$

si $y \neq 0$ ou $y \neq x$. ■

Définition 77

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$, avec comme convention $f^0 = \mathrm{Id}_E$.

Mieux que ça, on lui donne une structure d'algèbre.

Définition 78

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A est une algèbre s'il est muni d'une lci $\times$ telle que $(A, +, \times)$ est un anneau, et tel que

$$\forall (x, y) \in A^2, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda.(x \times y) = (\lambda.x) \times y = x \times (\lambda.y).$$

Exemple 79

$(\mathscr{M}_n, +, ., \times)$ et $(\mathscr{L}(E), +, ., \times)$ sont deux $\mathbb{K}$-algèbres.

On a ainsi toutes les règles de calcul dans un anneau qui sont vraies, en particulier :

Proposition 80

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, f et g dans $\mathscr{L}(E)$ $n \in \mathbb{N}$. **SI** $f \circ g = g \circ f$**,**

- (binôme de Newton) $(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$.
- (identité de Bernoulli) $f^n - g^n = (f-g) \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-k} \right)$.

Démonstration

La preuve est admise (déjà faite beaucoup de fois) ! ! ■

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Proposition 81

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. pour tout isomorphisme f de E dans F, f^{-1} est linéaire.
2. $(GL(E), \circ)$ est un groupe.

Démonstration

1. Soit f un isomorphisme de E dans F. Montrons que f^{-1} est linéaire. Soient x et y dans F, et λ dans $\mathbb{K}$. Alors on dispose de a et b dans E tels que $x = f(a)$ et $y = f(b)$. Alors

$$\begin{aligned} f^{-1}(x+\lambda y) &= f^{-1}(f(a)+\lambda f(b)) \\ &= f^{-1}(f(a+\lambda b)) \text{ car } f \text{ est linéaire} \\ &= a+\lambda b \\ &= f^{-1}(x)+\lambda f^{-1}(y). \end{aligned}$$

   Donc f^{-1} est linéaire.
2. Comme $GL(E)$ est une partie de $S(E)$ (ensemble des bijections de E) stable par $\circ$ (car la composée de deux bijectiones linéaires est une bijection linéaire) et par inverse, on en déduit que $GL(E)$ est un sous-groupe de $(S(E), \circ)$, donc un groupe.

■

Remarque 82

On a toujours $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

2.2 Noyau et image

Proposition 83

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. L'image d'un sev de E par f est un sev de F.
2. L'image réciproque d'un sev de F par f est un sev de E.

Remarque 84

Revoyez les notions d'image directe et réciproque si jamais ce n'est pas clair !

Démonstration

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E. Démontrons que $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Déjà, $f(0_E) \in f(A)$ donc $0_F \in f(A)$ donc $f(A) \neq \emptyset$.
Ensuite, soit $(y, y') \in f(A)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors on dispoe de x et x' dans A tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Alors

$$\lambda y + y' = \lambda f(x) + f(x') = f(\lambda x + x').$$

Or, A est un sous-espace vectoriel donc $\lambda x + x' \in A$, donc $\lambda y + y' \in f(A)$, donc (A) est un sous-espace vectoriel de F.

2. Soit B un sous-espace vectoriel de F. Démontrons que $f^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de E. (**attention,** $f^{-1}(B)$ est l'image réciproque de B par f, il n'est pas question de bijectivité ici). On rappelle qu

$$f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}.$$

Déjà, $f^{-1}(B) \neq \emptyset$ car $f(0_E) = 0_F \in B$ donc $0_E \in f^{-1}(B)$.
Ensuite, soit $(x, x') \in f^{-1}(B)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda x + x' \in f^{-1}(B)$. On calcule

$$f(\lambda x + x') = \lambda f(x) + f(x') \text{ par linéarité de } f,$$

mais $f(x) \in B$, $f(x') \in B$ et comme f est linéaire, $\lambda f(x) + f(x') \in B$, donc $\lambda x + x' \in f^{-1}(B)$.
Donc $f^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de E.

■

Exemple 85

1. Si on écrit $A = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ 2M + 3M^T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})\}$, alors $A = \varphi^{-1}(\mathcal{S}_n(\mathbb{K}))$ où $\varphi : \left|\begin{array}{l} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto 2M + 3M^T \end{array}\right.$. $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$, par linéarité de la transposition. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, donc A est un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. $B = \{(X^2+1)P' + P(X-1), P \in \mathbb{K}_3[X]\}$ est un sev de $\mathbb{K}_3[X]$ car $B = f(\mathbb{K}_3[X])$ où $f : P \mapsto (X^2+1)P' + P(X-1)$, et $\mathbb{K}_3[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
3. $$C = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} z \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0\right\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $C = \psi^{-1}(\{0\})$, où ψ est la forme linéaire
$$\psi : \left|\begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} z \mapsto x + y - z \end{array}\right.$$

Définition 86

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. Le noyau de f, noté $\ker(f)$, est $f^{-1}(\{0\})$. Ainsi, $\ker(f) = \{x \in E,\ f(x) \in \{0\}\}$, c'est-

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

à-dire (et je vous demande d'apprendre la définition qui suit) :

$$\ker(f) = \{x \in E,\ f(x) = 0_F\}.$$

2. L'image de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, est $f(E)$. Ainsi,

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x),\ x \in E\} = \{y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)\}.$$

Avant de regarder des exemples, il faut se demander l'utilité de ces deux espaces.

Proposition 87

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.
2. f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Démonstration

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons f injective. Soit alors x dans $\ker(f)$. Alors $f(x) = 0_F = f(0_E)$. Par injectivité de f, $x = 0_F$, donc $\ker(f) = \{0_E\}$. (remarque : en réalité on a seulement montré que $\ker(f) \subset \{0_E\}$ mais l'autre est évident)
   $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\ker(f) = \{0_E\}$ et démontrons que f est injective. **Soit** $(x,x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$.
   Alors $f(x) - f(x') = 0_F$,
   donc $f(x - x') = 0_F$,
   donc $x - x' \in \ker(f) = \{0_E\}$, donc $x - x' = 0_E$ donc $x = x'$. Donc f est injective.
2. Raisonnons par équivalences :

$$f \text{ est surjective } \Leftrightarrow f(E) = F \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F.$$

■

Exemple 88

Donnons quelques exemples.

1. Si $\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ \quad P \mapsto P' \end{array} \right.$
   Détermination du noyau. Soit P dans $\mathbb{R}[X]$. Alors

$$\begin{aligned} P \in \ker(\varphi) &\Leftrightarrow P' = 0 \text{ (polynôme nul)} \\ &\Leftarrow P \text{ est constant} \end{aligned}$$

   Donc $\ker(\varphi) = \mathbb{R}_0[X]$. En particulier φ n'est pas injective.
   Détermination de l'image. Démontrons que φ est surjective. Comme $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}[X]$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

de manière évidente, on montre l'inclusion réciproque.

Soit P dans $\mathbb{R}[X]$. Écrivons $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Posons $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k X^{k+1}}{k+1}$, alors $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $Q' = P$, i.e. $P = \varphi(Q)$, donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}[X]$.

2. Si $n \in \mathbb{N}$, si $\varphi_n : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P' \end{array} \right.$, alors $\ker(\varphi) = \mathbb{R}_0[X]$ et $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (exo : le démontrer).

3. Soit $f : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \\ x+3y \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

- Déterminons $\ker(f)$: pour cela, on résout un système linéaire **homogène**. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2x-y=0 \\ x+3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ -3y=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0,$$

donc $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, donc f est injective.

- Détermination de l'image de f. Ici, on résout un système linéaire **non homogène.** Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} a+b=x \\ 2a-b=y \\ a+3b=z \end{cases}$$

Déterminer cette image, c'est déterminer les conditions de compatibilité pour que ce système linéaire ait une solution. Or, si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} a+b=x \\ 2a-b=y \\ a+3b=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=x \\ -3b=y-2z \\ 2b=z-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=x \\ -3b=y-2x \\ 0=-\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}y+z. \end{cases}$$

Ce système a une solution ssi $-\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}y+z=0$. Donc $\mathrm{Im}(f)$ est le plan d'équation $-\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}y+z=0$.

4. Si ψ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^2$, $\psi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$, alors on remarque (faites-le !) que

$$\ker(\psi) = \mathrm{Im}(\psi) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, y=0 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

5. Toute équation différentielle linéaire homogène revient à déterminer le noyau d'une application linéaire ! Ainsi, si on considère $f' - xf = 0$, l'application D qui à $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ associe $D(f) : x \mapsto f' - xf$ est linéaire, et résoudre l'équation revient à déterminer $\ker(D)$.

Exercice 89

Dans $\mathbb{R}[X]$, déterminer $\ker(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ où $\varphi : P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$.

Proposition 90

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E, F)$, S un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E. Alors f réalise un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(f)$, c'est-à-dire que l'application

$$g : \left| \begin{array}{l} S \to \mathrm{Im}(f) \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

Remarque 91

On résume cette proposition en « toute application réalise un isomorphisme d'un supplémentaire de son noyau sur son image. »

Démonstration

La linéarité de g est évidente par la linéarité de f.
Montrons la bijectivité de g :

- Montrons que g est injective : soit x dans $\ker(g)$. Alors $g(x) = 0_F$ donc $f(x) = 0_F$ donc $x \in \ker(f)$. Mais comme $x \in S$, $x \in S|cap\ker(f) = \{0_E\}$ par supplémentarité. Donc $x = 0_E$ donc g est injective.
- Montrons que g est surjective : soit y dans $\mathrm{Im}(f)$. Alors on dispose de x dans E tel que $f(x) = y$. Mais $E = \ker(f) \oplus S$ donc on dispose de z dans $\ker(f)$ et s dans S tels que $x = z + s$. Mais alors

  $$y = f(x) = f(z) + f(s) = f(s) \text{ car } z \in \ker(f) \text{ donc } f(z) = 0.$$

  Or, $s \in S$ donc s est un antécédent de y par g.

D'où la surjectivité et la bijectivité ! ■

Proposition 92

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit $a \in F$. Soit (E) l'équation $u(x) = a$ d'inconnnue $x \in E$, $\mathscr{S}$ l'ensemble de ses solutions. Alors

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

- Si $a \notin \mathrm{Im}(u)$, $\mathscr{S} = \emptyset$.
- Si $a \in \mathrm{Im}(u)$, soit x_0 un antécédent de a par u. Alors

$$\mathscr{S} = \{x_0 + z,\ z \in \ker(u)\}.$$

Remarque 93

On dit que $\mathscr{S}$ est un sous-espace affine dirigé par $\ker(u)$.

Démonstration

- Si $a \notin \mathrm{Im}(u)$, le résultat est clair !
- Si $a \in \mathrm{Im}(u)$, alors on dispose de x_0 un antécédent de a par u. Soit x dans E. Alors

$$f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x - x_0) = 0_F \Leftrightarrow x - x_0 \in \ker(f).$$

Donc
$$x \in \mathscr{S} \Leftrightarrow x - x_0 \in \ker(f) \Leftrightarrow \exists z \in \ker(f),\ x = x_0 + z.$$

D'où le résultat ! ■

Exemple 94

C'est ce raisonnement que l'on applique lorsqu'on résout des équations différentielles linéaires avec second membre : on cherche une solution particulière puis on rajoute l'ensemble des solutions de l'équation homogèbre.
Ainsi, d'après l'exemple **??**, toute équation différentielle linéaire peut se mettre sous la forme

$$D(f) = g,$$

où D est une application linéaire et g une fonction.
Ce que nous dit la proposition précédente, c'est que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est
$$\{f_0 + f,\ f \in \ker(D)\},$$
où f_0 est une solution de l'équation avec second membre. Or, $\ker(D)$ est exactement les solutions de l'équation homogène !

Proposition 95 (HP)

Soient E, F et G trois espaces vectoriesl, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et g dans $\mathscr{L}(F, G)$. Alors $g \circ f = 0$ ssi $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(g)$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Remarque 96

Attention ! Ce n'est pas une propriété officiellement au programme, il faut la redémontrer.

Démonstration

Raisonnons par équivalences :

$$\begin{aligned} g \circ f = 0 &\Leftrightarrow \forall x \in E,\ g(f(x)) = 0_G \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E,\ f(x) \in \ker(g), \\ &\Leftrightarrow \forall x \in f(E),\ y \in \ker(g) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \ker(g). \end{aligned}$$

■

Exercice 97

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. A-t-on $\ker(f^2) = \ker(f)$? Si non, a quelle condition a-t-on égalité ? Même question pour l'image.

2.3 Applications linéaires et familles

Une question naturelle peut être alors de savoir comment les propriétés des applications linéaires peuvent se traduire avec les notions de familles libres, génératrices, et de bases.

Proposition 98

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, $(e_i)_{i\in I}$ une base de E, $(f_i)_{i\in I}$ une famille de F. Il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que

$$\forall i \in I, u(e_i) = f_i.$$

Démonstration

Comme $(e_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est une base de E, on sait que

$$\forall x \in E,\ \exists!(\lambda_i)_{i\in \mathrm{I}} \text{ presque nulle telle que } x = \sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i e_i.$$

Raisonnons par analyse-synthèse.
Analyse. Supposons qu'il existe une telle application linéaire f. Soit alors x dans E et $(\lambda_i)_{i\in \mathrm{I}}$ l'unique famille presque nulle telle que $x = \sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i e_i$. Alors, par linéarité de f,

$$f(x) = f\left(\sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i f(e_i) = \sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i y_i,$$

d'où l'unicité de f.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Synthèse. Définissons f par :

$$\forall x \in E,\ f(x) = \sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i y_i \text{ où } (\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}} \text{ l'unique famille presque nulle telle que } x = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i e_i.$$

f est bien définie, mais il faut démontrer qu'elle est linéaire. Soit $(x, y) \in E^2$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Soit $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ l'unique famille de coefficients dans $\mathbb{K}$ presque nulle telle que $x = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i e_i$, et $(\mu_i)_{i\in\mathrm{I}}$ l'unique famille de coefficients dans $\mathbb{K}$ presque nulle telle que $y = \sum_{i\in\mathrm{I}} \mu_i e_i$. Alors

$$\alpha x + y = \sum_{i\in\mathrm{I}} (\alpha\lambda_i + \mu_i) e_i,$$

donc les coefficients de $\alpha x + y$ dans la décomposition sur la base (e_i) sont les $(\alpha\lambda_i + \mu_i)_{i\in\mathrm{I}}$. Donc

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= \sum_{i\in\mathrm{I}} (\alpha\lambda_i + \mu_i) y_i \\ &= \alpha \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i y_i + \sum_{i\in\mathrm{I}} \mu_i y_i \\ &= \alpha f(x) + f(y), \end{aligned}$$

donc f est linéaire. D'où l'existence ! ■

Remarque 99

Autrement dit **une application linéaire est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base.**

Mieux : une application linéaire est déterminée par sa restriction sur des sous-espaces supplémentaires.

Proposition 100

Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $E_1, \dots, E_n$ tels que $E = \bigoplus_{k=1}^{n} E_k$, et pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $u_k \in \mathscr{L}(E_k, F)$.

Alors il existe une unique application linéaire u dans $\mathscr{L}(E, F)$ telle que pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $u_{|E_k} = u_k$.

Démonstration

La preuve est admise, le raisonnement est très similaire à la preuve précédente. ■

Exemple 101

Ces propositions peuvent servir à définir simplement des applications linéaires :

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

1. On définit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$ par
$$\forall k \in \mathbb{N},\ u(X^k) = \frac{1}{2k+1}X^{k+1}.$$
Alors si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $u(P) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2k+1} X^{k+1}$.
2. deuxième exemple, comme on sait que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$, on peut définir l'application linéaire $\tau : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(K)$ par :
$$\forall S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K}),\ \tau(S) = S \text{ et } \forall A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K}),\ \tau(A) = -A.$$
Alors si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, comme on dispose d'un unique couple $(S, A) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ tels que $M = S + A$, $\tau(M) = S - A$.
(remarque : on a (re)défini ainsi la transposition !)

Proposition 102

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E, $f \in \mathscr{L}(E, F)$

1. si $(e_i)_{i\in I}$ est libre et si f est injective alors $(f(e_i))_{i\in I}$ est libre.
2. si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E, alors si f est injective ssi $(f(e_i))_{i\in I}$ est libre.
3. si $(e_i)_{i\in I}$ est génératrice de E, f est surjective ssi $(f(e_i))_{i\in I}$ est une famille génératrice de F.
4. si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E, f est bijective ssi $(f(e_i))_{i\in I}$ est une base de F.

Démonstration

1. supposons $(e_i)_{i\in I}$ est libre et f injective. Soit $(\lambda_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille presque nulle telle que
$$\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i f(e_i) = 0.$$
Alors, par linéarité de f, $f\left(\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i e_i\right) = 0$.
Donc, par injectivité de f, $\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i e_i = 0$.
Donc, par liberté des $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$, pour tout i dans I, $\lambda_i = 0$.
Donc $(f(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est libre.
2. supposons que $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E.
Si f est injective alors par le point précédent $(f(e_i))_{i\in\mathrm{I}}$ est libre.
Si $(f(e_i))_{i\in\mathrm{I}}$ est libre, montrons que f est injective. Soit x dans $\ker(f)$. On dispose de $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ presque nulle telle que $x = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i e_i$. Alors $f\left(\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i e_i\right) = 0$, donc $\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i f(e_i) = 0$. Donc, par liberté de $(f(e_i))_{i\in\mathrm{I}}$ pour tout i dans I, $\lambda_i = 0$.
Donc $x = 0$, donc f est injective.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

3. supposons que $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est génératrice de E.
Si $(f(e_i))_{i\in\mathrm{I}}$ est génératrice de F, montrons que f est surjective. Soit y dans F. Alors on dispose de $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ presque nulle telle que $y = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i f(e_i)$. Donc, par linéarité de f, $f\left(\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i e_i\right) = y$. Donc $\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i e_i$ est un antécédent de y par f.
Si f est surjective, démontrons que $(f(e_i))_{i\in\mathrm{I}}$ est génératrice de F. Soit y dans F. Par surjectivité de f, on dispose de $x \in \mathbb{E}$ tel que $f(x) = y$. Par caractère générateur de $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$, on dispose de $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ presque nulle telle que $x = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i e_i$. Mais alors

$$y = f\left(\sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i\in\mathrm{I}} \lambda_i f(e_i),$$

donc y est combinaison linéaire des $(f(e_i))_{i\in\mathrm{I}}$. D'où le caractère générateur.

4. Le dernier point se démontre en combinant les deux précédents !

■

2.4 Projections et symétries

On va terminer ce chapitre par l'étude de quelques endomorphismes particuliers, à commencer par les projections.

Définition 103

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sev supplémentaires de E. Pour tout x de E, il existe un unique couple $(p(x), q(x))$ de $F \times G$ tel que $x = p(x) + q(x)$. Alors p et q sont linéaires. On dit que p est la projection sur F parallèlement à G et que q est la projection sur G parallèlement à F.

Démonstration

Démontrons que les applications sont linéaires.
Soit $(x, y) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$x = p(x) + q(x), \;\; y = p(y) + q(y),$$

donc

$$\lambda x + y = \underbrace{\lambda p(x) + p(y)}_{\in F} + \underbrace{\lambda q(x) + q(y)}_{\in G}$$

Mais

$$\lambda x + y = \underbrace{p(\lambda x + y)}_{\in G} + \underbrace{q(\lambda x + y)}_{\in G}.$$

Par le caractère direct de la somme $F \oplus G$, $p(\lambda x + y) = \lambda p(x) + p(y)$, et $q(\lambda x + y) = \lambda q(x) + q(y)$, donc p et q sont linéaires. ■

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Exemple 104

1. Dans $\mathbb{R}^2$, si $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$, si $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on cherche $f \in F$ et $g \in G$ tels que $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = f + g$, i.e. on cherche $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$
On résout alors le système
$$\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \end{cases}, \text{ d'unique solution } \lambda = \frac{x+y}{2},\ \mu = \frac{x-y}{2}.$$
Ainsi, si p est le projecteur sur F parallèlement à G,
$$p\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{x+y}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

2. Dans $\mathbb{R}^2$, toujours, si $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$, détemrinons φ le projecteur sur F parallèlement à G. Soit $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in R^2$. Alors
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x-y\\0\end{pmatrix},$$
donc
$$\varphi\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = y\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$
Si on change **un** des deux espaces supplémentaires, l'expression du projecteur change complètement.

3. $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $M = \dfrac{M+M^T}{2} + \dfrac{M-M^T}{2}$. Ainsi, si p est le projecteur sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, alors pour tout M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $p(M) = \dfrac{M+M^T}{2}$.

Point de méthode 105

Pour déterminer l'expression de la projection p sur F parallèlement à G, dans beaucoup de cas,

- on démontre par analyse-synthèse que $F \oplus G = E$,
- à la fin de l'analyse, on a réussi à écrire $x \in E$ sous la forme $x = f + g$. Le f trouvé est $p(x)$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Proposition 106

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sev supplémentaires de E, p la projection sur F parallèlement à G, q la projection sur G parallèlement à F.

1. $p + q = \mathrm{Id}_E$,
2. $\ker(q) = \mathrm{Im}(p) = G$,
3. $\mathrm{Im}(p) = \ker(q) = F$,
4. En particulier,
$$\boxed{\mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{Id}) = \{x \in E,\ p(x) = x\}}$$
et
$$\boxed{\mathrm{Im}(q) = \ker(q - \mathrm{Id}) = \{x \in E,\ q(x) = x\}}$$
(et pareil pour $\mathrm{Im}(q)$)
5. $p \circ p = p$,
6. $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Démonstration

1. Par définition, $\forall x \in E,\ x = p(x) + q(x)$,
2.
   - $\boxed{\ker(p) \subset \mathrm{Im}(q)}$ Soit $x \in \ker(p)$. Alors $x = p(x) + q(x) = q(x)$, donc $x \in \mathrm{Im}(q)$.
   - $\boxed{\mathrm{Im}(q) \subset G}$ Soit $y \in \mathrm{Im}(q)$. On dispose de $x \in E$ tel que $y = q(x)$. Mais par définition $q(x) \in G$.
   - $\boxed{G \subset \ker(p)}$ Soit $x \in G$. Alors $x = \underbrace{0}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G}$. Par définition, $p(x) = 0$.

   D'où le résultat.
3. Idem qu'au point précédent.
4. Soit $x \in E$. Alors $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$, donc $p(p(x)) = p(x)$.
5. $\mathrm{Im}(q) = \ker(p)$ donc $\mathrm{Im}(q) \subset \ker(p)$, donc $p \circ q = 0_{\mathscr{L}(E)}$. De même pour $q \circ p$.

■

Définition 107

Un projecteur de E est un endomorphisme p tel que $p \circ p = p$.

Proposition 108

Une projection est un projecteur.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Démonstration

Déjà démontré ! ■

Proposition 109

Soit p un projecteur d'un $\mathbb{K}$-ev E.

1. $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires.
2. p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

Démonstration

Là, une analyse-synthèse est très utile ! Soit $x \in E$.

- **Analyse.** On suppose $x = y + z$, avec $y \in \ker(p)$ et $z \in \mathrm{Im}(p)$.
  Alors $p(x) = p(y+z) = p(y) + p(z) = p(z)$.
  Or, $z \in \mathrm{Im}(p)$, donc on dispose de $v \in E$ tel que $p(v) = z$. Donc $p(z) = p \circ p(v) = p(v) = z$, donc $\boxed{p(x) = z}$.
  Donc $y = x - z = \boxed{x - p(x)}$.
- **Synthèse.** Posons $y = x - p(x)$ et $z = p(z)$. Alors
  — $p(y) = p(x - p(x)) = p(x) - p \circ p(x) = p(x) - p(x) = 0$, donc $y \in \ker(p)$.
  — $z = p(x)$ donc $z \in \mathrm{Im}(p)$.
  — $y + z = x - p(x) + p(x) = x$.

D'où la supplémentarité de $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ et, par la même occasion, le fait que p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$ ($z = p(x)$). ■

Remarque 110

1. Comme les projecteurs sont des projections, toutes les propriétés des projections sont utilisables pour des projecteurs.
2. Quels sont les projecteurs inversibels ?

Lorsqu'on a deux sev supplémentaire, on peut faire un autre type de transformation : ce sont les symétries. Comme pour les projecteurs on donne deux définitions : une géométrique et une en termes d'endomorphismes, et on va ensuite voir qu'elles coïncident.

Définition 111

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sev supplémentaires. Pour tout x de E, il existe un unique couple $(p(x), q(x))$ de $F \times G$ tel que $x = p(x) + q(x)$. L'application $s : x \mapsto p(x) - q(x)$ est linéaire et est appelée symétrie par rapport à F parallèlement à G.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Proposition 112

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G supplémentaires, s la symétrie par rapport à F parallèlement à G, p la projection sur F parallèlement à G, $q = \mathrm{Id}_E - p$. Alors

1. $s = p - q = 2p - \mathrm{Id}_E$.
2. $-s$ est la symétrie par rapport à G parallèlement à F.
3. $F = \ker(s - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E,\ s(x) = x\}$,
4. $G = \ker(s + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E,\ s(x) = -x\}$,
5. $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

Démonstration

1. Évident,
2. $-s = -(p-q) = q - p$.
3. Soit $x \in E$. Alors on a les équivalences

$$\begin{aligned} x \in \ker(s - \mathrm{Id}_E) &\Leftrightarrow s(x) = x \\ &\Leftrightarrow p(x) - q(x) = p(x) + q(x) \\ &\Leftrightarrow 2q(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \ker(q) \\ &\Leftrightarrow x \in F. \end{aligned}$$

4. On fait pareil.
5. $s \circ s = (p-q) \circ (p-q) = p \circ p - p \circ q - q \circ p + q \circ q = p + 0_{\mathscr{L}(E)} + 0_{\mathscr{L}(E)} + q = \mathrm{Id}_E$.

■

Exemple 113

1. Soit s la symétrie par rapport à $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. On sait que

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ M = \frac{M + M^T}{2} + \frac{M - M^T}{2}$$

Ain si,

$$s(M) = \frac{M + M^T}{2} - \frac{M - M^T}{2} = M^T.$$

Ainsi, s est la transposition.

2. Dans $\mathbb{R}^2$, exprimer la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Définition 114

Une involution de E est un endomorphisme s de E tel que $s \circ s = \mathrm{Id}$.

Proposition 115

Une symétrie est une involution.

Démonstration

Déjà démontrée ! ■

Proposition 116

Soit s une involution. Alors $\ker(s - \mathrm{Id})$ et $\ker(s + \mathrm{Id})$ sont supplémentaires et s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id})$.

Démonstration

Faisons encore une analyse-synthèse ! Soit $x \in E$.

- **Analyse.** Supposons qu'il existe $(y, z) \in \ker(s - \mathrm{Id}_E) \times \ker(s + \mathrm{Id}_E)$ tels que $x = y + z$. Alors

$$\begin{cases} x = y + z \\ s(z) = s(y) + s(z) = y - z \end{cases}$$

  Ainsi, $y = \dfrac{x + s(x)}{2}$ et $z = \dfrac{x - s(x)}{2}$. D'où l'unicité de la décomposition.

- **Synthèse.** Posons $y = \dfrac{x + s(x)}{2}$ et $z = \dfrac{x - s(x)}{2}$. Alors
  - déjà, $s(y) = \dfrac{s(x) + s(s(x))}{2} = \dfrac{s(x) + x}{2} = y$, donc $y \in \ker(s - \mathrm{Id}_E)$.
  - ensuite, $s(z) = \dfrac{s(x) - s(s(x))}{2} = \dfrac{s(x) - x}{2} = -z$, donc $z \in \ker(s + \mathrm{Id}_E)$.
  - enfin, $y + z = x$.

  D'où l'existence et la supplémentarité.

On en déduit alors que si $x \in E$, le symétrique de x par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$ est

$$\frac{x + s(x)}{2} - \frac{x - s(x)}{2} = s(x),$$

d'où le second résultat ! ■

Remarque 117

On a déjà fait cette preuve deux fois :

- pour décomposer toute fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

En effet,

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f \mapsto (x \mapsto f(-x)) \end{array} \right.$$

est une involution linéaire !

- pour décomposer toute matrice comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Cette fois, c'est la transposition qui est une bonne involution linéaire.

2.5 Formes linéaires et hyperplans

Rappel. Si E est un $\mathbb{K}$-ev, une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. On note $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ ou E^* l'ensemble des formes linéaires.

Exemple 118

1. $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto x + y - 2z \end{array} \right.$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$. On remarque que son noyau est un plan.
2. $P \mapsto P(1)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$.
3. La trace est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 119

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ un base de E.
Si $x \in E$, alors on dispose d'une unique famille presque nulle $(\varphi_i(x))_{i\in\mathrm{I}}$, telle que

$$x = \sum_{i\in\mathrm{I}} \varphi_i(x).e_i.$$

Alors, pour tout i dans I, $\varphi_i \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.

Définition 120

On appelle la famille $(\varphi_i)_{i\in\mathrm{I}}$ la famille des formes linéaires coordonnées associée à la base $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$.
On note parfois $\forall i \in \mathrm{I},\ \varphi_i = e_i^*$.

Remarque 121 (Culturelle)

$(e_i^*)_{i\in\mathrm{I}}$ forme une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$, mais c'est hors-programme (le fait qu'il s'agisse d'une base vient juste du fait que toute application linéaire est déterminée de manière unique par l'image d'une base).

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Démonstration

On prouve la linéarité pour tout i dans I.
Soit $i_0 \in \mathrm{I}$.
Notons $F = \mathrm{Vect}(e_i)_{\substack{i \in \mathrm{I} \\ i \neq i_0}}$ et $G = \mathrm{Vect}(e_{i_0})$. Alors comme

$$(e_i)_{\substack{i \in \mathrm{I} \\ i \neq i_0}} \uplus (e_{i_0})$$

est une base de E, $F \oplus G = E$.
Comme $|forallx \in E$,

$$x \in \sum_{\substack{i \in \mathrm{I} \\ i \neq i_0}} \varphi_i(x).e_i + \varphi_{i_0}(x).e_{i_0},$$

on en déduit que la projection sur G parallèlement à F est

$$x \mapsto \varphi_{i_0}(x).e_{i_0}.$$

Cette application est linéaire. Donc

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \varphi_{i_0}(\lambda x + y).e_{i_0} = \lambda \varphi_{i_0}(x).e_{i_0} + \varphi_{i_0}(y).e_{i_0},$$

donc

$$\varphi_{i_0}(\lambda x + y).e_{i_0} = \left(\lambda \varphi_{i_0}(x) + \varphi_{i_0}(y)\right).e_{i_0},$$

donc, comme $e_{i_0} \neq 0_E$,

$$\varphi_{i_0}(\lambda x + y) = \lambda \varphi_{i_0}(x) + \varphi_{i_0}(y)$$

■

Exemple 122

1. Dans $\mathbb{R}^2$, si $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x.e_1 + y.e_2$$

et si (φ_1, φ_2) est la famille des formes linéaires coordonnées associées, alors

$$\varphi_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x \text{ et } \varphi_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = y.$$

2. Si on change un des vecteurs, on change l'ensemble des formes linéaires coordonnées !
Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, si $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, alors

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(x - \frac{y}{2}\right) e_1 + \frac{y}{2} e_2,$$

donc, si (φ_1, φ_2) est la famille des formes linéaires coordonnées associées, alors pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x - \frac{y}{2} \text{ et } \varphi_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{y}{2}.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

3. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ la famille des formes linéaires coordonnées associées, alors

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \varphi_i \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = x_i.$$

4. Dans $\mathbb{K}[X]$, si $\alpha \in \mathbb{K}$, $((X-\alpha)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$. Si $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la famille des formes linéaires coordonnées associées, alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathbb{K}[X],\ \psi_k(P) = \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}.$$

5. Dans $\mathbb{K}_n[X]$, si $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, si $(L_0, \dots, L_n)$ est la base de Lagrange associée, si $(\rho_0, \dots, \rho_n)$ est la famille des formes linéaires coordonnées associées, alors

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \rho_k(P) = P(x_k).$$

Définition 123

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Exemple 124

1. Dans $\mathbb{R}^2$, si
$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ x - 2y = 0 \right\},$$
alors D est un hyperplan, c'est le noyau de $\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x - 2y$. De manière générale, les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont les droites.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, si
$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ 3x + y - 2z = 0 \right\},$$
alors P est un hyperplan, c'est le noyau de $\psi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 3x+y-2z$. De manière générale, dans $\mathbb{R}^3$, les hyperplans sont les plans.
3. L'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ d'intégrale nulle est un hyperprlan de $\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Proposition 125

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, H un hyperplan de E, a un vecteur non nul de E.
Si $a \notin H$, alors $H \oplus \mathrm{Vect}(a) = E$.

Démonstration

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ tel que $H = \ker(\varphi)$.
Alors $\varphi(a) \neq 0$ car $a \notin H$.
Soit $x \in E$.

- **Analyse.** On suppose que $x = h + \lambda.a$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\varphi(x) = \varphi(h) + \lambda\varphi(a) = \lambda\varphi(a),$$

  donc $\lambda = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a)}$ et $h = x - \lambda.a$.

- **Synthèse.** Posons $\lambda = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a)}$ et $h = x - \lambda.a$. Alors
  — $\lambda.a \in \mathrm{Vect}(a)$,
  — $\varphi(h) = \varphi(x - \lambda.a) = \varphi(x) - \lambda\varphi(a) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$, donc $h \in H$,
  — $h + \lambda.a = x$.

  D'où l'existence et la supplémentarité désirée.

$\blacksquare$

Proposition 126 (Réciproque de la précédente)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, D une droite de E et H un supplémentaire de D. Alors H est un hyperplan.

Démonstration

Notons $D = \mathrm{Vect}(a)$, $a \neq 0$.
Soit p la projection sur $\mathrm{Vect}(a)$ parallèlement à H.
Alors, pour tout x dans E, $p(x) \in \mathrm{Vect}(a)$ donc on dispose de $\varphi(x) \in \mathbb{K}$ tel que $x = \varphi(x).a$. Montrons que $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$, que $\varphi \neq 0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{K})}$ et que $H = \ker(\varphi)$.

- Soit $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. p est linéaire, donc $p(\lambda x + y) = \lambda p(x) + p(y)$. Ainsi,

$$\varphi(\lambda.x + y).a = \lambda\varphi(x).a + \varphi(y).a,$$

  donc $(a \neq 0)$ $\varphi(\lambda.x + y) = \lambda\varphi(x) + \varphi(y)$.
- $\varphi \neq 0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{K})}$ car $\varphi(a) = 1$
- On remarque que

$$H = \{x \in E,\ p(x) = 0_E\} = \{x \in E,\ \varphi(x).a = 0_E\} = \{x \in E,\ \varphi(x) = 0_{\mathbb{K}}\} = \ker(\varphi).$$

D'où le résultat désiré. $\blacksquare$

Les propositions précédentes permettent de retrouver les résultats de géométrie de lycée. Une autre

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

propriété importante était la suivante au lycée : les droites $x - 2y = 0$ et $2x - 4y = 0$ décrivent le même ensemble.

Proposition 127

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, φ et ψ deux formes linéaires non nulles. Alors $\ker(\varphi) = \ker(\psi)$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\ker(\varphi) = \ker(\psi) = H$, soit $a \notin H$. Alors $H \oplus \mathrm{Vect}(a) = E$. Or, **une application linéaire est uniquement déterminée par sa restriction à des sev supplémentaires.** Donc φ et ψ sont déterminées uniquement par leur image de a (elles sont nulles sur H).

Notons $\lambda = \dfrac{\psi(a)}{\varphi(a)}$. Alors :

— $\forall x \in H,\ \psi(x) = \lambda\varphi(x)$,

— soit $x \in \mathrm{Vect}(a)$. On dispose de $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $x = \mu a$. Alors $\psi(x) = \mu\psi(a) = \mu\lambda\varphi(a) = \lambda\varphi(x)$.

Donc $\psi = \lambda\varphi$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si l'on dispose de λ dans $\mathbb{K}^*$ tel que $\psi = \lambda\varphi$, alors

$$\ker(\varphi) = \{x \in E,\ \varphi(x) = 0_E\} \underbrace{=}_{\text{car } \lambda \neq 0} \{x \in E,\ \lambda\varphi(x) = 0\} = \{x \in E,\ \psi(x) = 0\} = \ker(\psi).$$

■

2.6 Commutation et stabilisation

Définition 128

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sev de E et $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u stabilise F si $u(F) \subset F$.

Proposition 129

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$. Si $u \circ v = v \circ u$, alors u stabilise $\ker(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$.

Démonstration

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

- soit $x \in \ker(v)$, montrons que $u(x) \in \ker(v)$:

$$\begin{aligned} v(u(x)) &= v \circ u(x) \\ &= u \circ v(x) \text{ par commutativité} \\ &= u(v(x)) \\ &= u(0_E) \text{ car } x \in \ker(v) \\ &= 0_E \end{aligned}$$

  donc $u(x) \in \ker(v)$, donc u stabilise $\ker(v)$.
- soit $y \in \mathrm{Im}(v)$. Alors on dispose de $x \in E$ tel que $y = v(x)$. Donc

$$\begin{aligned} u(y) &= u(v(x)) \\ &= v(u(x)) \text{ car } u \circ v = v \circ u, \end{aligned}$$

  donc $u(y) \in \mathrm{Im}(v)$, donc u stabilise $\mathrm{Im}(v)$.

■

Proposition 130 (Jolie propriété HP, pour bien finir le chapitre)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Les seuls endomorphismes qui stabilisent toutes les droites sont les homothéties.
2. Si on suppose que tout sev de E admet un supplémentaire, alors les seuls $u \in \mathscr{L}(E)$ tels que $\forall v \in \mathscr{L}(E)$, $u \circ v = v \circ u$ sont les homothéties.

Démonstration

1. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Déjà, « stabiliser toutes les droites » signifie que

$$\forall x \in E,\ \exists \lambda \in \mathbb{K},\ u(x) = \lambda x$$

   Si u est une homothétie, alors

$$\exists \lambda \in E,\ \forall x \in E,\ u(x) = \lambda.x,$$

   donc u stabilise bien toutes les droites.
   Réciproquement, si u stabilise toutes les droites, réécrivons la propriété en

$$\forall x \in E,\ \exists \lambda_x \in \mathbb{K},\ u(x) = \lambda_x.x$$

   Notre but est de montrer que λ_x ne dépend pas de x !
   Soit $x \in E$, non nul, fixé. On veut montrer que $\forall y \in E,\ \lambda_y = \lambda_x$. Soit $y \in E \backslash \{0_E\}$.
   - si $y = \mu.x$, alors

$$u(y) = \begin{cases} \lambda_y.y = \lambda_y \mu.x \text{ par hypothèse.} \\ u(\mu.x) = \mu\lambda_x.x \text{ car } y = \mu x \end{cases}$$

     Par égalité de ces deux expressions et comme $x \neq 0_E$, $\lambda_y = \lambda_x$.

- si y n'est pas colinéaire à x, alors

$$u(x+y) = \begin{cases} u(x)+u(y) = \lambda_x.x + \lambda_y.y \text{ par linéarité} \\ \lambda_{x+y}(x+y) \text{ par hypothèse} \end{cases}$$

  Mais la famille (x, y) est libre et

$$\lambda_x.x + \lambda_y.y = \lambda_{x+y}.x + \lambda_{x+y}.y,$$

  donc $\lambda_x = \lambda_{x+y}$ et $\lambda_y = \lambda_{x+y}$, donc $\lambda_x = \lambda_y$.

Donc, au final, $\forall y \in E\backslash\{0_E\},\ \lambda_y = \lambda_x$. L'égalité est toujours vraie pour $y = 0$, donc on peut conclure que

$$\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall y \in E,\ u(y) = \lambda y,$$

i.e. u est une homothétie !

2. Comme

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall v \in \mathscr{L}(E),\ \lambda \mathrm{Id}_E \circ v = v \circ \lambda \mathrm{Id}_E,$$

les homothéties sont bien solutions du problème.
Soit maintenant $u \in \mathscr{L}(E)$, telle que $\forall v \in \mathscr{L}(E)$, $u \circ v = v \circ u$.
Montrons que u stabilise toutes les droites.
Soit D une droite de E, soit F un supplémentaire de D dans E et p la projection sur D parallèlement à F.
Alors $D = \mathrm{Im}(p)$. Or, par hypothèse, $u \circ p = p \circ u$ donc u stabilise $\mathrm{Im}(p) = D$.
Donc u stabilise toutes les droites donc, par le point précédent, u est une homothétie.

■