N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

TD 20
Probabilités

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

1. Démontrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$.
2. Soient $(A_1, \dots, A_n)$ n événements indépendants de Ω. Démontrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right).$$

Exercice 2. Soient U et V deux variables aléatoires iid de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On note $m = \min(U, V)$ et $M = \max(U, V)$.

1. Les variables aléatoires m et M sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer la loi de m, et en déduire son espérance.
3. Calculer l'espérance de M sans calculer sa loi.
4. Déterminer la loi de (m, M).

Exercice 3. Soit n dans $\mathbb{N}$ et X une v.a. à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Démontrer que $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geqslant k)$.

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X de loi uniforme sur $\mathcal{P}([\![1, n]\!])$.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de $\mathrm{Card}(X)$.
2. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de $\displaystyle\sum_{i \in X} i$.

Exercice 5. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. On pose pour tout k entier $Y_k = X_k + X_{k+1}$. Donner la loi de Y_k, son espérance et sa variance. Donner la covariance de Y_i et Y_j pour $i \neq j$.
2. On pose $T_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$. Calculer l'espérance et la variance de T_n.

Exercice 6. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire sur Ω, $\varepsilon > 0$. Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathrm{e}^{-t\varepsilon} \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX})$$

Exercice 7. *Inégalité de Paley-Zygmund*. Soient X une variable aléatoire réelle positive ou nulle pour laquelle $\mathbb{E}(X^2) > 0$ et $\eta \in [0, 1]$.

1. Montrer que $\mathbb{E}\left(X \mathbb{1}_{\{X \geqslant \eta \mathbb{E}(X)\}}\right)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2) \mathbb{P}(X \geqslant \eta \mathbb{E}(X))$.
2. En déduire l'inégalité de Paley-Zygmund : $P(X \geqslant \eta \mathbb{E}(X)) \geqslant (1 - \eta)^2 \dfrac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}$.

Présentation des exercices. Deux types d'exercices :

- ceux de « probabilités élémentaires » sont à faire **rapidement**, ce n'est pas le coeur du chapitre. Pour une première séance d'exercice, faire les exercices 8, 11, 12 et 13 (le reste est pour vous, si vous voulez davantage pratiquer).
- ceux de vraies probabilités. Là il faut pouvoir déterminer des lois, utliser le théorème de transfert : faites les exercices 27 et 16 par exemples. Il faut aussi pouvoir utiliser des inégalités : les exercices 31, 32 et 36 sont là pour ça !

2 Probabilité sur un ensemble fini, variables aléatoires

2.1 Exercices faisant intervenir un peu de modélisation – retour en terminale

Exercice 8. ●○○ Une urne contient n boules noires et b blanches. On tire toutes les boules sans remise. Calculer la probabilité des événements suivants

1. « La première boule tirée est noire, la deuxième est blanche. »

2. « On n'a jamais tiré deux fois de suite la même couleur. »

Exercice 9. ●○○ On tire trois cartes dans un jeu de 32 cartes, avec 4 couleurs (cœur, carreau, pique, trêfle). Calculer la probabilité d'obtenir trois cartes qui sont soit toutes les trois de la même couleur, soit de trois couleurs différentes, sous l'hypothèse

1. d'un tirage sans remise.

2. d'un tirage avec remise.

Exercice 10. ●◐○ On dispose de composants électroniques E de même type pour lesquels la probabilité de tomber en panne est p (indépendamment les uns des autres). On peut mettre des circuits A et B en parallèle ou en série, ce que l'on note $A||B$ et $A-B$. Si A est un circuit, on note $\mathbb{P}(A)$ la probabilité pour qu'il tombe en panne.

1. Calculer $\mathbb{P}(A||B)$ et $\mathbb{P}(A-B)$ en fonction de $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.

2. Quel est le circuit le plus fiable : $(A-B)||(C-D)$ ou $(A||B)-(C||D)$?

Exercice 11. ●●○ L'Assemblée nationale est constituée d'une proportion de p députés conservateurs, qui ne changent jamais d'avis sur quoi que ce soit, et d'une proportion de $1-p$ députés progressistes qui changent d'avis complètement au hasard, avec probabilité r, entre deux votes successifs. Au cours d'une séance, il a été note qu'un député, choisi au hasard, a voté deux fois de suite de la même façon.

1. Quelle est la probabilité pour que ce député soit conservateur ?

2. Quelle est la probabilité qu'il vote de la même manière la prochaine fois ?

Exercice 12. ●◐○ Une puce se déplace sur les trois sommets A, B C d'un triangle en partant de A. À chaque instant elle fait un saut : si elle est en A alors elle va en B, si elle est en B alors elle a une chance sur deux d'aller en A et une chance sur deux d'aller en C, si elle est en C elle y reste.

1. Montrer qu'on ne peut arriver en C qu'à des instants pairs.

2. Quelle est la probabilité que la puce arrive en C pour a première fois à l'instant $2n$?

2.2 Événements

Exercice 13. ●●○ Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux événements soient indépendants est : $\mathbb{P}(A \cap B)\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B})\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$.

Exercice 14. *Inégalité de Kosmanek – Lyon, Cachan MP*. ●●○ Soient A et B deux événements d'un epf. Montrer que $|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

2.3 Variables aléatoires

Exercice 15. ●○○ On lance n fois une pièce, puis à nouveau n fois.

1. Quelle est la probabilité p_n d'avoir eu le même nombre de pile ?
2. Déterminer un équivalent de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 16. ●◐○ Soient X, Y, Z trois variables aléatoires i.i.d., uniformes sur $[\![0, n]\!]$.

1. Déterminer la loi de $X + Y$.
2. Déterminer $\mathbb{P}(X + Y = Z)$.

Exercice 17. ●◐○ Soient $p \in]0, 1[$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de mêmes lois définies pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ par

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = p \text{ et } \mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - p.$$

On pose pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ $\pi_k = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} X_i$, $u_k = \mathbb{P}(\pi_k = 1)$ et $v_k = \mathbb{P}(\pi_k = -1)$.

1. (i) Montrer que pour tout k dans $[\![1, n-1]\!]$,

$$u_{k+1} = pu_k + (1-p)v_k \text{ et } v_{k+1} = (1-p)u_k + pv_k$$

   (ii) Déterminer, grâce à $u_k + v_k$ et $u_k - v_k$, une expression explicite de u_k et v_k en fonction de k pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

   (iii) Donner un équivalent de ce résultat quand k tend vers $+\infty$: interprétation ?

2. (i) Montrer que si $p = \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires $\pi_1, \dots, \pi_n$ sont deux à deux indépendantes.

   (ii) Montrer que, réciproquement, si $\pi_1, \dots, \pi_n$ sont deux à deux indépendantes, alors $p = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 18. ●◐○

1. Montrer que le produit de deux variables de Bernoulli est une variable de Bernoulli.
2. Montrer que deux variables de Bernoulli sont indépendantes si et seulement si elles ne sont pas corrélées.

Exercice 19. ●●◐ On choisit une permutation uniformément dans S_n. On appelle L la variable aléatoire correspondant à la longueur du cycle dans lequel 1 se situe. Montrer que L suit la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

Exercice 20. *Urne de Polya*. ●●○ Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge. À chaque fois qu'on tire une boule, on remet dans l'urne la boule tirée, ainsi qu'un boule de même couleur. Quelle est la loi du nombre de boules blanches au k-ième tirage ? Quelle est la probabilité que la n-ième boule tirée soit blanche ?

Exercice 21. *Loi de succession de Laplace*. ●●○ Considérons $m+1$ urnes $U_0, \dots, U_m$ et supposons que, pour tout k, U_k contient k boules bleues et $m-k$ boules rouges. Choisissons une des urnes et effectuons-y n tirages avec remise. Quelle est la probabilité, sachant que les n tirages ont donné des boules bleues, qu'il en soit de même du $(n+1)$-ième ?

Exercice 22. *Une matrice à coefficients entiers tirée « au hasard » est inversible*. ●●◐ Soient A, B, C et D 4 variables aléatoires suivant toutes la loi uniforme sur $[\![-n, n]\!]$. On note $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Démontrer que la probabilité que M soit inversible tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

2.4 Exercices plus folkloriques

Exercice 23. ●●○ Soit n un entier naturel. On suppose que la décomposition en facteurs premiers de n est $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{m_k}$. On tire au hasard, uniformément, un entier x dans $[\![1, n]\!]$.

1. Soit $k \in [\![1, r]\!]$. Quelle est la probabilité que p_k divise x ?
2. Montrer que les événements « p_k divise x » sont mutuellement indépendants.
3. Montrer que la probabilité que n soit premier avec x est égale à $\prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$.
4. On rappelle que l'indicatrice d'Euler $\varphi(n)$ représente le nombre d'entiers inférieurs à n premiers avec n. Exprimer $\varphi(n)$ en fonction de $p_1, \dots, p_r$.

Exercice 24. ●●○ Vous devez tirer au sort équitablement entre deux joueurs mais ne disposez pour ce faire que d'une pièce biaisée (dont vous ignorez en plus le biais exact). Comment faire ?

Exercice 25. ●●● Un train contient n places numérotées et n voyageurs possèdent un billet. Le premier voyageur monte dans le train mais il a oublié son billet et se place donc au hasard. Puis chaque personne s'installe à sa place si elle est libre et choisit une place libre au hasard sinon. Quelle est la probabilité que la dernière personne se trouve à sa place ?

Exercice 26. *Nombre de dérangements – ce n'est pas un exercice de probabilités, mais de dénombrement, avec una application en probabilités à la fin*. ●●● Soit E un ensemble de cardinal n. On appelle dérangement de E toute permutation de E sans point fixe. On note d_p le nombre de dérangements d'un ensemble à p éléments.

1. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.
2. Démontrer la formule d'inversion de Pascal : soit f une fonction définie sur $\mathbb{N}$, soit g définie pour tout n par $g(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k)$. Montrer que pour tout entier naturel n, $f(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} g(k)$.
3. En déduire une formule pour d_n.
4. Quelle est la limite de la proportion $\frac{d_n}{n!}$ des dérangements de E parmi les permutations de E quand n tend vers $+\infty$?

5. N'ayant pas envie de corriger le prochain DS, M Laillet décide que chaque élève devra corriger une copie qu'il aura tirée au sort. On met alors les noms de tous les élèves dans un chapeau (virtuel) et chacun tire au sort un nom. Donner une valeur approchée de la probabilité qu'un élève tire son nom.

3 Moments d'une variable aléatoire

3.1 Calculs d'espérance et de variance

Exercice 27. ●◐○ Soit X une variable de loi $\mathscr{B}(n,p)$. Calculer $\mathbb{E}(2^X)$ et $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.

Exercice 28. ●○○ Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ espace probabilisé fini et X variable aléatoire réelle discrète vérifiant $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \mathbb{E}\left(X^4\right) = 1$.

1. Démontrer que $|\mathbb{E}(X)| \leqslant 1$.
2. Calculer $\mathbb{V}(X^2)$ et en déduire la loi de X (elle pourra dépendre d'un paramètre qu'on ne cherchera pas à déterminer !).

Exercice 29. ●●●

1. Montrer que dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = 1 + X + X^2 + \cdots + X^{10} = \dfrac{X^{11}-1}{X-1}$ ne peut s'écrire comme produit de deux polynômes réels de degré 5.
2. On considère deux dés pipés (lois pas forcément uniformes, éventuellement distinctes pour les deux dés, mais avec des faces numérotées de 1 à 6), on note X, Y les v.a. exprimant le jet de l'un et l'autre dé. On veut montrer qu'il est impossible que $Z = X + Y$ ait une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$. On raisonne par l'absurde que Z suit une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.
   (a) Que vaut $\mathbb{E}(t^Z)$ pour tout t dans $\mathbb{R}$?
   (b) En utilisant l'indépendance de X et Y, aboutir à une contradiction.

Exercice 30. Soit n dans $\mathbb{N}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Déterminer une suite $(u_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, indépendante de X, telle que $\mathbb{E}(X^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \mathbb{P}(X \geqslant k)$.

3.2 Inégalités

Exercice 31. ●○○ Soit X une variable réelle.Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $V(X) \leqslant \mathbb{E}((X-a)^2)$.

Exercice 32. ●○○ Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Démontrer que $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) \geqslant \dfrac{1}{\mathbb{E}(X)}$.

Exercice 33. ●◐○ Soit n un entier naturel non nul, $\alpha \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right]$, $p \in [0,1]$. On lance n fois une pièce de monnaie bien équilibrée. Déterminer une condition suffisante sur n pour que la probabilité d'avoir une proportion de « pile » dans $\left[\dfrac{1}{2}-\alpha, \dfrac{1}{2}+\alpha\right]$ soit supérieure ou égale à p.

Exercice 34. ●●○ Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, avec X de variance strictement positive. Déterminer la droite d'approximation linéaire de Y, i.e. trouver a et b deux réels minimisant la quantité $\mathbb{E}\left((Y-(aX+b))^2\right)$.

Exercice 35. ●●● *Approximation uniforme de la valeur absolue.* Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(x)$ avec $x \in [0,1]$. On note $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ pour n entier non nul. On considère $f : [0,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto |t-1/2|$ et on pose

$$\forall x \in [0;1] \quad \mathrm{B}_n(f)(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right] \qquad \text{et} \qquad \Delta_n(f) = \max_{x\in[0,1]} \|\mathrm{B}_n(f)(x) - f(x)\|_\infty$$

1. Justifier que $\Delta_n(f)$ existe.
2. Si X est variable aléatoire, comparer $\mathbb{E}(\mathrm{X})^2$ et $\mathbb{E}\left(\mathrm{X}^2\right)$.
3. Vérifier que f est lipschitzienne.
4. Vérifier que $B_n(f)$ est une fonction polynomiale.
5. Montrer
$$\Delta_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$
6. Qu'a-t-on démontré ?

Exercice 36. *Inégalité de Cantelli*. ●●◐ Soit X une variable aléatoire d'espérance m et de variance V.

1. (Méthode piétonne)
   (i) Montrer que $\forall x \geqslant 0$, $\mathbb{P}(X - m \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V + x^2}{(\varepsilon + x)^2}$.
   (ii) En déduire que $\mathbb{P}(X - m \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V}{V+\varepsilon^2}$ et que $\mathbb{P}(|X-m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{2V}{V+\varepsilon^2}$.
   (iii) Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychef.
2. (Avec Cauchy-Schwarz) Retrouver le résultat précédent en remarquant que $\mathbb{E}(\varepsilon + m - X) \leqslant \mathbb{E}((\varepsilon+m-X)\mathbb{1}_{X<m+\varepsilon})$, et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $(\varepsilon+m-X)\mathbb{1}_{X<m+\varepsilon}$.

Indications.

1.
   1. Faire une étude de fonctions.
   2. Utiliser l'événement contraire de $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.
2.
   1. Regarder la probabilité que $m = 1$ et $M = 1$.
   2. (i) Décomposer selon le bon système d'événements.
      (ii)
      (iii) Utiliser la linéarité de l'espérance.
      (iv) Séparer les cas $a > b$, $a = b$ et $a < b$.
3. Écrire que $\mathbb{P}(X \geqslant k) = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} \mathbb{P}(X = i)$, puis intervertir les sommes.
4. Pour cet exercice, plusieurs méthodes sont possibles, mais une méthode, utilisant des indicatrices, est vraiment puissante !
5.
   1. Distinguer les cas $i = j$, $|i-j| = 1$ et $|i-j| > 1$.

   2. Utiliser la formule de la variance d'une somme de variables aléatoires.

6. Penser que si $t \geqslant 0$, $a \leqslant b \Leftrightarrow \mathrm{e}^{ta} \leqslant \mathrm{e}^{tb}$.

7. **1.** Utiliser l'inégalité de Cauchy-Shwarz.

   2. Écrire $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{X \geqslant \eta \mathbb{E}(X)\}}) + \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{X \leqslant \eta \mathbb{E}(X)\}})$.

8. Ici, pas utile de nommer proprement des événements, décrire précisément les situations.

9. Faire du dénombrement !

10. Penser qu'un circuit en parallèle tombe en panne si les deux composants tombent en panne, alors qu'en série il suffit d'un seul.

11. Décomposer l'événement sur le système complet « le député est progressite » $\cup$ « le député est conservateur »

12. Utiliser la formule des probabilités composées.

13. Écrire $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = (\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbb{P}(A \cap B))(\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B))$.

14. Poser $p = \mathbb{P}(A \cap B)$ et déterminer en fonction de p le maximum de $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

15. Poser X la variable aléatoire correspondant au nombre de pile du premier lancer, Y celle du second, et écrire proprement, à l'aide de X et Y, les probabilités désirées.

16. La première question a essentiellement été faite en cours : voir si vous savez la refaire ! Pour la deuxième, utiliser le système complet d'événements $(\{Z = k\})_{0 \leqslant k \leqslant n}$.

17. **1.** (i) Utiliser les probabilités totales.

   (ii) Considérer $u_k + v_k$ et $u_k - v_k$.

   (iii) Donner un équivalent de ce résultat quand k tend vers $+\infty$: interprétation ?

   2.

18. Utiliser qu'une variable de Bernoulli est caractérisée par le fait qu'elle est à valeurs dans $\{0, 1\}$, et que sa loi est caractérisée par son espérance.

19. Dénombrer le nombre de cycles de longueur k contenant 1.

20. On peut envisager deux approches :

- Une approche avec simplement des événements, en montrant que, si A_n est l'événement « le n-ième tirage amène une boule blanche », $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{b}{b+r}$.
- Une approche avec des variables aléatoires : nommons N_k le nombre de boules blanches au k-ième tirage et X_k la variable aléatoire valant 1 si la k-ième boule tirée est blanche. Montrer que N_k suit la loi uniforme sur $[\![1, k]\!]$.

21.

??. C'est davantage un exercice de dénombrement que de probabilités. Et, attention, on ne veut pas que vous calculiez exactement cette probabilité. Essayez plutôt de démontrer que l'événement contraire tend vers 0, en montrant que l'événement contraire est inclus dans la réunion des événements $\{B = 0\}$ et $\left\{B \neq 0 \text{ et } C = \dfrac{AD}{B}\right\}$.

23. Utiliser le théorème de Gauss pour la deuxième question.

24. Essayer de trouver deux événements qui ont même probabilité.

25. Imaginer que lorsqu'un passager voit la place prise par la personne sans billet, elle fasse se lever cette personne sans billet.

26. **1.** Trier les permutations de E selon leur nombre de points fixes.

2. Écrire la formule de droite comme une somme double, qu'on intervertira, et reconnaître un binôme de Newton.

3.

4. Penser que $\mathrm{e}^x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

5. Se ramener à un tirage de permutation.

27. Utiliser la formule de transfert.

28. **1.** Utiliser la définition de $\mathbb{V}(X)$.

2. Démontrer que $\mathbb{V}(X^2) = 0$: que peut-on dire d'une variable aléatoire de variance nulle ?

29. **1.** Utiliser le TVI, et déterminer précisément les racines de $1 + X + \cdots + X^{10}$.

2. (a) Utiliser le théorème de transfert.

(b) Démontrer que cela revient à factoriser sur $\mathbb{R}$ le polynôme de la première question.

30. S'inspirer de l'exercice 3 et utiliser le théorème de transfert.

31. Développer le membre de droite.

32. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

33. Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff.

34. On pourra utiliser l'expression de $\mathbb{E}\left((Y - (aX + b))^2\right)$ en fonction de la variance et d'une autre espérance.

36. **1.** (i) Ajouter x des deux côtés et utiliser les mêmes idées que dans la preuve de l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff à partir de l'inégalité de Markov.

(ii) Étudier la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{V + x^2}{(\varepsilon + x)^2}$.

(iii) Pour la seconde inégalité, distinguer en fonction de si $\varepsilon^2 \leqslant V$ ou l'inverse.