TD 17
Dénombrement

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. *Dénombrement sur les permutations.*

1. Dans $\mathcal{S}_n$, combien y a-t-il de transpositions ?
2. De manière générale, dans $\mathcal{S}_n$, combien y a-t-il de p-cycles ?

Exercice 2. ●○○ Soit E un ensemble de cardinal n, $n \in \mathbb{N}$.

1. Combien y a-t-il de couples (A, B) de parties de E ?
2. Combien de ces couples vérifient la condition $A \subset B$?
3. Combien vérifient $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$?
4. Combien vérifient $A \cup B = E$?

Exercice 3. ●●○ On considère des déplacements sur le réseau $\mathbb{Z}^2$, partant de 0. À chaque étape, on peut aller en haut, en bas, à gauche ou à droite (on peut revenir sur nos pas).

1. Combien y a-t-il de chemins de longueur n ?
2. Combien y a-t-il de chemis de longueur $2n$ qui ramènent au point de départ ?

Exercice 4. *Nombre de surjections d'un ensemble dans un autre.* Pour n et p dans $\mathbb{N}$, on note $S_{n,p}$ le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, p]\!]$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, si $p > n$ que vaut ? $S_{n,p}$. Calculer $S_{n,n}$, $S_{n,1}$, $S_{n,2}$.

Dans le reste de l'exercice, on suppose $0 < p \leqslant n$.

2. **Une première relation de récurrence.**
   Montrer que pour tout k dans $[\![1, p]\!]$, il y a $\dbinom{p}{k} S_{n,k}$ applications de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$ dont l'image possède k éléments.
   En déduire, par un raisonnement de dénombrement, que $p^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} S_{n,k}$.
3. **Une deuxième relation de récurrence.**
   Montrer en dénombrant que si $1 \leqslant p \leqslant n-1$, alors $S_{n,p} = p(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1})$.
   Au cours du dénombrement, on pourra, si φ est une surjection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$, considérer sa restriction à $[\![1, n-1]\!]$.
4. En déduire, à l'aide de l'une des relations de récurrence, que $S_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} (-1)^{p+k} \binom{p}{k} k^n$.

2 Exercices à faire en TD

Stratégie. Il y a deux types d'exercices :

- les exercices « pour s'entraîner à faire des petits raisonnements de dénombrements » : ce sont les 5, 6, 7, 8, 9. Un peu aussi le 11 même si les raisonnements sont clairement moins triviaux. En faire quelques uns.
- les exercices davantage liés à des notions mathématiques, dans la lignée des 2 et 3 : les 10, 4 et 12.

Minimum à faire. Si vous faites et comprenez bien 5, 6, 8, 11, c'est très bien !

Exercice 5. ●○○ Dénombrer le nombre d'anagrammes du mot « NOUNOURS » .

Exercice 6. ●○○ Un jeu de cartes comporte 32 cartes de 4 couleurs (cœur, pique, carreau, trèfle), chaqe couleur comportant 8 cartes : sept, hui, neuf, dix, valet, dame, roi et as. Une main est un ensemble de 8 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains en tout ?
2. Combien de mains contiennent au moins un cœur ?
3. Combien de mains contiennent trois piques et une dame ? (on lèvera l'ambiguïté de l'énoncé en proposant deux solutions possibles)
4. Combien de mains contiennent au moins un carré (i.e. 4 cartes de même hauteur) ?

Exercice 7. ●◐○ Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On lance une pièce de monnaie autant de fois que nécessaire pour qu'elle finisse par retomber k fois du même côté, pas nécessairement k fois successives.

1. Quel est le nombre minimal m et le nombre maximal M de lancers ?
2. Soit $j \in [\![m, M]\!]$.
   (i) Combien y a-t-il de résultats de l'épreuve en j lancers exactement ?
   (ii) Combien y a-t-il de résultats de l'épreuve en j lancers au plus ?

Exercice 8. ●◐○

1. Combien peut-on faire de nombres à 5 chiffres avec les chiffres 1,2,3,4,5,6 ?
2. Quelle est la somme de ces nombres ?

Exercice 9. ●●○ Une urne contient deux catégories de boules : a boules blanches et b boules noires. Les boules de même couleur sont toutes identiques. On effectue une série de $a+b$ tirages successifs, sans remettre la boule tirée, de sorte que l'urne est vidée à la fin des $a+b$ tirages.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien de ces séries font tirer la dernière boule blanche en k-ième position ? On notera s_k ce nombre.
3. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{a+b} s_k$? En déduire une formule combinatoire.

Exercice 10. *Approximation diophantienne*. ●●◐ Si y est un réel, on appelle partie fractionnaire de y la quantité, notée $\{y\}$ et définie par $\{y\} = y - \lfloor y \rfloor$. Soit x un réel.

1. Démontrer que : $\forall N \in \mathbb{N},\ \exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant q \leqslant N,\ \left| x - \dfrac{p}{q} \right| \leqslant \dfrac{1}{qN}$.
   On appliquera le principe des tiroirs à $0, \{x\}, \{2x\}, \dots, \{Nx\}$.
2. En déduire qu'il existe une infinité de couples (p,q) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\left| x - \dfrac{p}{q} \right| \leqslant \dfrac{1}{q^2}$.

Exercice 11. ●●◐ Soit E un ensemble de cardinal n.

1. (i) Combien peut-on définir de lois de composition internes sur E ?
   (ii) Combien sont commutatives ?
   (iii) Combien possèdent un élément neutre ?

2. (i) Combien peut-on définir de relations binaires sur E ?
(ii) Combien sont réflexives ?
(iii) Combien sont symétriques ?

Exercice 12. ●●○ Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, et P un polygone régulier à n côtés.

1. Combien P comporte-t-il de diagonales ?

2. Combien y a-t-il de triangles équilatéraux dans ce polygone ?

3. ●●◐ Combien y a-t-il de triangles isocèles dans ce polygone ?

4. ●●● Désormais, P n'est plus régulier. On suppose que trois sommets du polygone ne sont jamais alignés, que deux diagonales ne sont jamais parallèles et que trois diagonales ne se coupent jamais au même point. En combien de points distincts des sommets les diagonales précédentes se coupent-elles ?

Exercice 13. *Nombre de dérangements – ce n'est pas un exercice de probabilités, mais de dénombrement, avec una application en probabilités à la fin.* ●●● Soit E un ensemble de cardinal n. On appelle dérangement de E toute permutation de E sans point fixe. On note d_p le nombre de dérangements d'un ensemble à p éléments.

1. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.

2. Démontrer la formule d'inversion de Pascal : soit f une fonction définie sur $\mathbb{N}$, soit g définie pour tout n par $g(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k)$. Montrer que pour tout entier naturel n, $f(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} g(k)$.

3. En déduire une formule pour d_n.

4. Quelle est la limite de la proportion $\frac{d_n}{n!}$ des dérangements de E parmi les permutations de E quand n tend vers $+\infty$?

5. N'ayant pas envie de corriger le prochain DS, M Laillet décide que chaque élève devra corriger une copie qu'il aura tirée au sort. On met alors les noms de tous les élèves dans un chapeau (virtuel) et chacun tire au sort un nom. Donner une valeur approchée de la probabilité qu'un élève tire son nom.

Indications.

2 Une bonne idée : essayer de considérer que choisir une partie de E, c'est choisir, pour chaque élément de E, s'il appartient ou pas à cette partie.

3 **1.**
2. Voir un chemin comme un mot sur un alphabet de 4 lettres.

5 Dire que choisir une anagramme, c'est choisir les emplacements des lettres.

6 Utiliser un raisonnement de la forme « choisir... c'est choisir... », et utiliser les coefficients binomiaux.

7 **1.**
2. (a) Compter le nombre de résultats qui amènent k « Face », et multiplier par 2.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

(b) Exprimer le résultat à l'aide d'une somme.

8 Utiliser le nombre 77777.

9 La formule combinatoire à trouver est $\displaystyle\sum_{k=1}^{a+b}\binom{k-1}{a-1}=\binom{a+b}{a}$.

11
1. Attention à ne pas compter deux fois les diagonales ! Et un côté n'est pas une diagonale.
2. Distinguer selon que 3 divise n ou pas.
3. Remarquer que choisir deux points suffit presque à déterminer le triangle isocèle.
4. Les hypothèses assurent juste que les points sont distincts 2 à 2. Déterminer ce qu'il se passe lorsqu'on passe d'un polygone à n côtés à un polygone à $n+1$ côtés (on rajoute un point...)

10
1. Déjà fait en cours !
2. Démontrer que si une suite de rationnels converge vers un réel non rationnel, alors la suite des dénominateurs tend vers $+\infty$.

4 Une indication pour cet exercice : penser qu'une loi ou qu'une relation est déterminée par une **table** (comme une table de multiplication).

12
1. Trier les permutations de E selon leur nombre de points fixes.
2. Écrire la formule de droite comme une somme double, qu'on intervertira, et reconnaître un binôme de Newton.
3.
4. Penser que $e^x=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$.